



Задание 2.

$$\sqrt{b}(x^2 - 10x + 25) + \frac{\sqrt{b}}{(x^2 - 10x + 25)} \leq \frac{1}{5} \sqrt{b^3} \left| \sin \frac{\pi x}{10} \right|$$

Заметим, что $b \geq 0$, т.к. присутствует $\sqrt{b}$ в неравенстве
Известно, что $|\sin \frac{\pi x}{10}| \leq 1$. Тогда верно, что

$$\sqrt{b}(x-5)^2 + \frac{\sqrt{b}}{(x-5)^2} \leq \frac{1}{5} \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} \left| \sin \frac{\pi x}{10} \right| \leq \frac{1}{5} \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}$$

Если мы найдём решения неравенства

$$\sqrt{b}(x-5)^2 + \frac{\sqrt{b}}{(x-5)^2} \leq \frac{1}{5} \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}, \text{ то найдём и решения исходного,}$$

т.к. выражение только уменьшится и левая часть будет
верно. Значит решим

$$\sqrt{b}(x-5)^2 + \frac{1}{(x-5)^2} \leq \frac{1}{5} \sqrt{b}$$

$\sqrt{b}(x-5)^4 + 5 \leq \sqrt{b}(x-5)^2$, заменим $(x-5)^2 = t$, решения не измен.
 $\sqrt{b}t^2 - \sqrt{b}t + 5 \leq 0$, т.к. $\sqrt{b} \geq 0$, ветви параболы направлены
вверх, значит надо, чтобы $D \geq 0$.

$$D = \sqrt{b} - 100\sqrt{b} \geq 0$$

$\sqrt{b}(1 - 100\sqrt{b}) \geq 0$, Отсюда $\sqrt{b} \geq 0$ и $\frac{1}{100} \geq \sqrt{b}$. Значит

$\frac{1}{100^2} \geq b$. Получаем наибольшее значение $b = \frac{1}{100^2}$, при
котором $\&$ неравенство (в том числе исходное) имеет
хотя бы 1 решение.

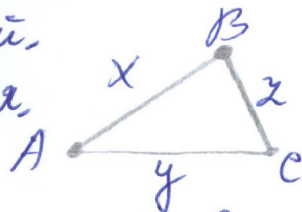
$$\text{Ответ. } b = \frac{1}{100^2}$$

85



Задание 5.

Станции будут образовывать треугольник, т.к. никакие 3 точки не лежат на прямой.
Пусть А - 1 станция, В - вторая, С - третья.
Запишем условия из задачи.



$$\begin{cases} x+z=4y & (1) \\ x+y=85 & (2) \\ y+z=x+a & (3) \end{cases}$$

Чтобы такое было, надо чтобы выполнялись неравенства треугольника. Значит

$$\begin{cases} x+y > z \Leftrightarrow 85 > z, \text{ значит } z < 85. \\ x+z > y \Leftrightarrow 4y > y, \text{ верно} \\ z+y > x \Leftrightarrow x+a > x, \text{ верно откуда } a > 0. \end{cases}$$

Решим систему, вычтем (1)-(3)

⊕ 205

$$x-y = 4y-x-a$$

$$2x-5y = -a$$

$$2x+y=85 \quad 2x+2y=170$$

$$\Rightarrow 7y = 170+a \Leftrightarrow y = \frac{170+a}{7}$$

Отсюда $x = \frac{425-a}{7}$, а $z = 4y-x = \frac{680+4a}{7} - \frac{425-a}{7} = \frac{255+5a}{7}$

Но нам известно, что $z < 85$, значит $\frac{155+5a}{7} < 85$

$255+5a < 595 \Leftrightarrow 5a < 340 \Leftrightarrow a < 68$. Значит ограничения на a , $0 < a < 68$. При $a=5$, расстояния будут равны

Решение системы $x = \frac{425-a}{7}$, $y = \frac{170+a}{7}$, $z = \frac{255+5a}{7}$

Подставим $a=5$, отсюда $x=60$, $y=25$, $z=40$.

Ответ. $0 < a < 68$, при $a=5$ расстояния 25, 40, 60.



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 83819 Класс 10

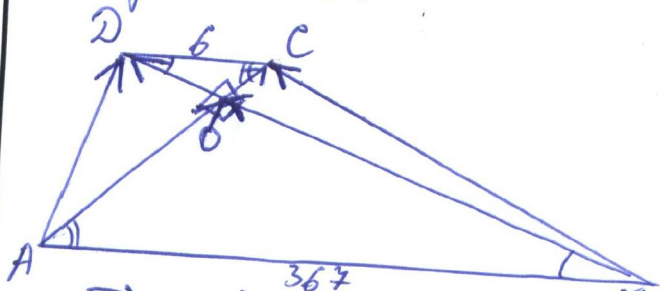
Вариант 41 Дата 19.02.2022



Площадка написания

Уфимский государственный
нефтяной технический университет

Задача 3.



Дано: $ABCD$ — трапеция
 $AB = 367$, $DC = 6$.

$AC \cap BD = O$, $AC \perp BD$

Найти: $\vec{AO} \cdot \vec{BC}$

Решение:

1) $\vec{AD} = \vec{AO} + \vec{OD}$ и $\vec{BC} = \vec{BO} + \vec{OC}$. Перемножим

2) $\vec{AD} \cdot \vec{BC} = (\vec{AO} + \vec{OD})(\vec{BO} + \vec{OC}) = \vec{AO} \cdot \vec{BO} + \vec{AO} \cdot \vec{OC} + \vec{OD} \cdot \vec{BO} + \vec{OD} \cdot \vec{OC} =$
 $= AO \cdot OC + OD \cdot BO$, т.к. $\vec{AO} \cdot \vec{BO} = AO \cdot BO \cdot \cos 90^\circ = 0$ и $\vec{OD} \cdot \vec{OC} = OD \cdot OC \cdot \cos 90^\circ = 0$

$\vec{AO} \cdot \vec{OC} = AO \cdot OC \cdot \cos 0^\circ = AO \cdot OC$ и $\vec{OD} \cdot \vec{BO} = OD \cdot BO \cdot \cos 0^\circ = OD \cdot BO$.

3) $\triangle ODC \sim \triangle AOB$, по двум смежным углам. Тогда
 $\frac{AO}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{367}{6}$, откуда $AO = \frac{367}{6} OC$ и $OB = \frac{367}{6} OD$.

4) $\vec{AD} \cdot \vec{BC} = AO \cdot OC + OD \cdot BO = \frac{367}{6} OC^2 + \frac{367}{6} OD^2 = \frac{367}{6} (OC^2 + OD^2)$
 Но из $\triangle ODC$ известно, что $OC^2 + OD^2 = DC^2$

5) $\vec{AD} \cdot \vec{BC} = \frac{367}{6} (OC^2 + OD^2) = \frac{367}{6} \cdot 6^2 = 2202$

Ответ. $\vec{AD} \cdot \vec{BC} = 2202$

155



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Площадка написания

Уфимский государственный
нефтяной технический университет

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр

83819 Класс

10

Вариант 47

Дата

19.02.2022

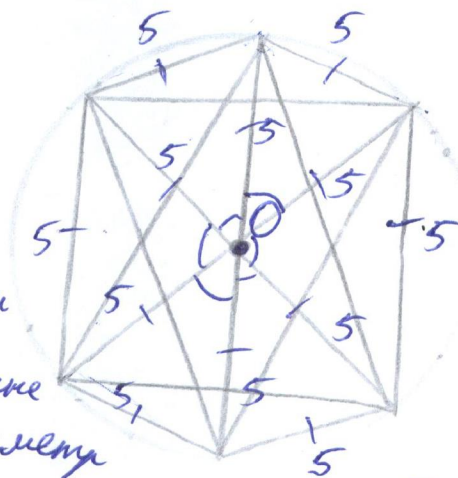


Задание 4

Обозначим центр геологов т. О, т.е. центр поля или окружности. П.к. они делят поле на 6 равных секторов, то угол между соседними дорогами 60° . Но тогда каждая внутренняя дорога совпадет и получится диаметр окружности. За один час геологи пройдут 5 км. Тогда на поле выделены окружность радиусом 5 (см. рис.). 6 точек на окружности будут места до куда они могут добраться. Рассмотрим сколько всего ^{расстояний} дорог между точками, их будет 21 (диагонали 6-угольника, ~~и~~ стороны). Считая, то что они могут пойти по 1 дороге. Стороны получившегося 6-угольника будут по 5 км и следовательно меньше 8, т.е. не подходят. Рас. Диаметр будет равен 10, т.е. больше 8. Так же расстояние между диагоналями через вершину будет равно $5\sqrt{3}$, что больше 8 ($\sqrt{3} \approx 1,7, \Rightarrow 1,7 \cdot 5 = 8,5 > 8$). Значит нам подходят 6 диагоналей и 3 диаметра. Получаем, что вероятность равна $\frac{9}{21} = \frac{3}{7} \approx 0,423$.

Ответ. $\frac{3}{7} \approx 0,423$

100





ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания
Уфимский государственный
нефтяной технический университет

Шифр 83819 Класс 10

Вариант 47 Дата 19.02.2022



Заполняется проверяющим строго по образцу

Образец заполнения:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Оценка цифрами

Оценка прописью

Подпись

5	8	Пятьдесят восемь					Хайбуллин Р. Я.		

Задание 1.

$$x^6 - 2022x^2 + \sqrt{2021} = 0$$

Сделаем замену $x^2 = t, t \geq 0$

Тогда $t^3 - 2022t + \sqrt{2021} = 0$. Заметим что $t = \sqrt{2021}$ является корнем. Разделим $t^3 - 2022t + \sqrt{2021}$ на $t - \sqrt{2021}$ по схеме Горнера.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad -2022 \quad \sqrt{2021} \\ \sqrt{2021} \quad 1 \quad \sqrt{2021} \quad -1 \quad 0 \end{array}$$

$$\sqrt{2021} \quad 1 \quad \sqrt{2021} \quad -1 \quad 0$$

$$\text{Получаем } (t - \sqrt{2021})(t^2 + \sqrt{2021}t - 1) = 0$$

$$t^2 + \sqrt{2021}t - 1 = 0$$

$$D = 2021 + 4 > 0$$

$$t = \frac{-\sqrt{2021} + 45}{2}, t \geq 0$$

$$t = \frac{-\sqrt{2021} - 45}{2}, t < 0$$

Отсюда $x^2 = \sqrt{2021}, x^2 = \frac{45 - \sqrt{2021}}{2}$

$$x = \pm \sqrt[4]{2021}, x = \pm \sqrt{\frac{45 - \sqrt{2021}}{2}}$$

55

Ответ: $\sqrt[4]{2021}, -\sqrt[4]{2021}, \sqrt{\frac{45 - \sqrt{2021}}{2}}, -\sqrt{\frac{45 - \sqrt{2021}}{2}}$