



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика



Площадка написания

Санкт-Петербургский горный университет (математика)

Шифр 95466 Класс 11

Вариант 22 Дата 19.02.2022

Заполняется проверяющим строго по образцу

Образец заполнения: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
	5	1	0	1	5			2	8

Оценка цифрами

Оценка прописью

Подпись

5	8	ПЯТЬДЕСЯТ ВОСЕМЬ								
---	---	------------------	--	--	--	--	--	--	--	--

1. $x^9 - 2022x^3 - \sqrt{2021} = 0$. $\sqrt[3]{2021}$. Заменим в нашем уравнении и получим: $x^9 - (x^2 + 1)x^3 - \alpha = 0$. $x^9 - \alpha^2 x^3 - x^3 - \alpha = 0$. Или $\alpha^2 x^3 + \alpha + x^3 - x^9 = 0$. Рассмотрим это выражение как квадратное относительно α : $f(\alpha) = \alpha^2 x^3 + \alpha + x^3 - x^9$.

$$D = 1 - 4(x^6 - x^{12}) = 4x^{12} - 4x^6 + 1 = (2x^6 - 1)^2 \geq 0$$

Сразу заметим, что в исходном уравнении $x^9 - 2022x^3 - \sqrt{2021} = 0$, $x = 0$ не доставляет решений. Прозвучит решение $f(\alpha) = 0$, получим:

$$\alpha_1 = \frac{-1 - 12x^6 - 1}{2x^3}$$

$$\alpha_2 = \frac{-1 + 12x^6 - 1}{2x^3}$$

Вне зависимости от того, какими знаками раскрывается модуль, получим множество решений $\alpha = \frac{-1 - 2x^6 + 1}{2x^3} =$

$$= -x^3; \alpha = \frac{-1 + 2x^6 - 1}{2x^3} = \frac{2x^6 - 2}{2x^3} = \frac{x^6 - 1}{x^3}. \text{ т.к. } 0^9 - 2022 \cdot 0^3 - \sqrt{2021} \neq 0,$$

Считаем, что $x \neq 0$. Из первого равенства $\alpha = -x^3$ или $\sqrt{2021} = -x^3$, получаем $x = -\sqrt[3]{2021}$. Из второго равенства $\alpha = \frac{x^6 - 1}{x^3} =$

$$= x^3 - \frac{1}{x^3}; \text{ заменив на } x^3 \neq 0 \text{ и заменив } x^3 \text{ на } t, \text{ получим } t^2 - at - 1 = 0;$$

$$D = a^2 + 4 = 2021 + 4 = 2025 = 45^2 > 0; t_1 = \frac{a - 45}{2} = \frac{\sqrt{2021} - 45}{2};$$



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания

Санкт-Петербургский горный
университет (математика)

Шифр

95466 Класс

11

Вариант

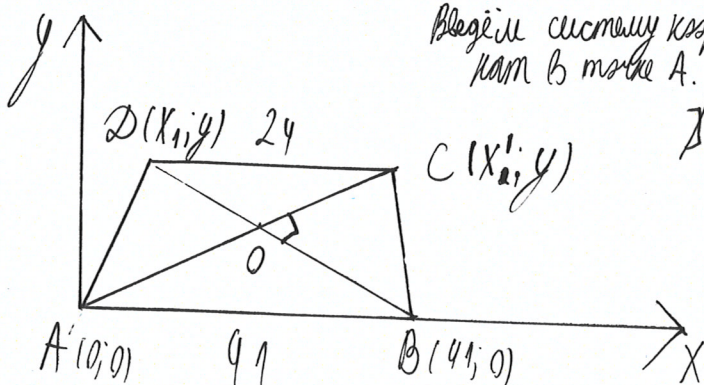
22

Дата

19.02.2022



3



Введём систему координат (Декартову), считая началом координат точку A. ось X проведём через B, ось Y — перпендикулярную ей.

$$AC \perp BD \Rightarrow \vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0.$$

$$OA = a; OB = b; OC = c; OD = d.$$

$$\text{П.К. } AC \perp BD, AB^2 + CD^2 =$$

$$= (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 =$$

$$+ c^2 + d^2 = 41^2 + 24^2. AD^2 + BC^2 = (a^2 + d^2) + (b^2 + c^2) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 =$$

$$= 41^2 + 24^2. X' = X_1 + 24. \vec{BC}(x_2; y). \text{ Тогда } x_1 + 24 + (1 - x_2) =$$

$$= 41; x_1 - x_2 = 17. x_1 = 17 + x_2; \vec{AD}(x_1; y).$$

$$\vec{AD} \times \vec{BC} = x_1 x_2 + y^2 = x_2^2 + 17x_2 + y^2. AD^2 + BC^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2y^2 =$$

$$= 2x_2^2 + 34x_2 + 17^2 + 2y^2 = 2(\vec{AD} \times \vec{BC}) + 17^2 = 41^2 + 24^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{AD} \times \vec{BC} = \frac{41^2 + 24^2 - 17^2}{2} = \frac{1681 + 576 - 289}{2} =$$

$$= \frac{1392 + 576}{2} = \frac{1968}{2} = 984. \text{ Ответ: } \vec{AD} \times \vec{BC} = 984$$

15



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



Площадка написания

Санкт-Петербургский горный
университет (математика)

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр

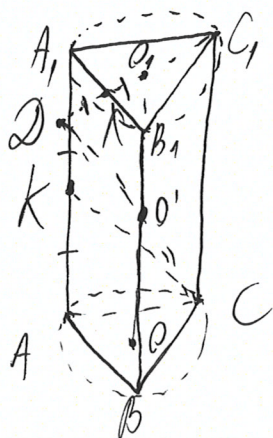
95466 Класс

11

Вариант 22.

Дата

19.02.2022



Пусть.

$$CK = \frac{1}{2} AB = \dots = AC = \dots = A_1C_1 = a;$$

$$AA_1 = \dots = CC_1 = b.$$

$$CK^2 = a^2 + \frac{1}{4}b^2 \text{ из } \triangle AKC, \text{ где } \angle KAC = 90^\circ;$$

так как

т.к. призма - правильная. Также, так

как призма - правильная, центр сферы O' лежит

на середине OO_1 , где O - центр $\triangle ABC$, O_1 - центр $\triangle A_1B_1C_1$ (центры тяжести). $CO' = O'D$. Т.к. таким образом получим, что

D - на продолжении CO_1 касательную. Значит O_1D в плоскости $(A_1B_1C_1)$, т.к. $\triangle DC_1C$ - прямоугольный, O_1D - его средняя линия: $(C_1D \perp CC_1)$, т.к. $CC_1 \perp (A_1B_1C_1)$, так как призма - правильная. К $A_1B_1 \perp (C_1CD)$, так как $A_1B_1 \perp C_1O_1$, так как $(C_1O_1 \perp$

плоскости в правильном $\triangle ABC$) и $CC_1 \perp (A_1B_1C_1) \Rightarrow CC_1 \perp A_1B_1 \Rightarrow$

$$\begin{matrix} \text{т.к. } A_1B_1 \perp C_1O_1 \\ A_1B_1 \perp CC_1 \\ C_1O_1 \cap CC_1 = C_1 \end{matrix} \Rightarrow A_1B_1 \perp (C_1CD) \quad (C_1D \perp A_1B_1 \text{ как точка пересечения двух взаимно перпендикулярных прямых})$$

$$= \text{т.к. } O_1D \perp A_1B_1, \text{ т.к. } (C_1D \perp A_1B_1) \text{ и } (C_1O_1 \perp A_1B_1) \Rightarrow C_1D \perp A_1B_1$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{12} = 8 \Rightarrow \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4} = 8 \Leftrightarrow \frac{a^2}{3} = 2; a = \sqrt{6};$$

$$b = 2\sqrt{6} \Rightarrow V = S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{6\sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{18\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}.$$

28

Стр. 4



$$t_2 = \frac{9+45}{2} = \frac{\sqrt{2021}+45}{2} \quad \chi_1^3 = \frac{\sqrt{2021}-45}{2} \quad \chi_1 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2021}-45}{2}};$$

$$\chi_2^3 = \frac{\sqrt{2021}+45}{2}; \quad \chi_2 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2021}+45}{2}}$$

5

Ответ: $\chi_0 = -\sqrt{2021}; \chi_1 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2021}-45}{2}}; \chi_2 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2021}+45}{2}}$ - корни
 уравнения $\chi^3 - \sqrt{2021}\chi^2 - \sqrt{2021} = 0$

2. $\forall x f(x) - (x-0,5) f(-x-1) = 1 \Rightarrow \forall x f(-x-1) - ((-x-1)-0,5) f(-(-x-1)-1) =$
 $= f(-x-1) + (x+1,5) f(x) = 1.$ Вычтем из второго уравнения,
 верного для всех x , первое, которое также верно для всех x . Получим.
 $f(x)x + f(x) \cdot 0,5 + f(-x-1)x + f(-x-1) \cdot 0,5 = (f(x) + f(-x-1))(0,5+x) = 0.$

I) $f(x) = -f(-x-1).$ Тогда $f(x)$

II) $x = -0,5 - 0,5$. Тогда $f(-0,5) = f(-(-0,5)-1) = f(-0,5)$

Тогда для $x \in$ $f(-0,5) - (-0,5 - 0,5) f(-0,5) = f(-0,5) + f(-0,5) =$
 $= 2 f(-0,5) = 1. \quad f(-0,5) = \frac{1}{2} \neq 0. \Rightarrow f(-0,5) \neq -f(-0,5)$

Тогда для $x \in (-\infty; -0,5) \cup (-0,5; +\infty)$ $f(x) + (x-0,5)f(x) =$
 $= (x+0,5)f(x) = 1; \quad f(x) = \frac{1}{x+0,5}. \text{ и для } x = -0,5 \quad f(x) = \frac{1}{2}.$

значит $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+0,5}, & x \neq -0,5; \\ \frac{1}{2}, & x = -0,5. \end{cases}$
 Ответ: $\nearrow$

10