ГАЗПРОМ

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

(ab)c=a(bc) E=mc²

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 19220

Класс 10 **Вариант** 41 **Дата Олимпиады** 10.02.2018

Площадка написания ООО „Газпром добыча шельф Южно-Сахалинск“, газпром-класс

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	0	4	0	8	0	0	16	16	16	64	шестьдесят четыре	

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 19220

1. $A = \frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}} : \frac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab}\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1} = \frac{\frac{b-a}{ab}}{\frac{a^3+b^3}{a^3b^3}} \cdot \frac{a^2+b^2-ab}{a^2b^2} \cdot \frac{ab}{(a-b)(a+b)} =$

$= \frac{(b-a)a^2b^2}{(a+b)(a^2+b^2-ab)} \cdot \frac{a^2+b^2-ab}{a^2b^2} \cdot \frac{ab}{(a-b)(a+b)} = -\frac{ab}{(a+b)^2} = -\frac{(1-\sqrt2)(1+\sqrt2)}{(1-\sqrt2+1+\sqrt2)^2} =$

$= -\frac{1-2}{4} = 0,25$

2. $\sqrt[3]{(5+x)^2} + 4\sqrt[3]{(5-x)^2} = 5\sqrt[3]{25-x^2}$

$(\sqrt[3]{5+x})^2 + 4(\sqrt[3]{5-x})^2 = 5\sqrt[3]{5-x}\cdot\sqrt[3]{5-x}$

$\sqrt[3]{5+x} = t, \sqrt[3]{5-x} = k$

$t^2+4k^2 = 5tk$

$t^2+4k^2-5tk=0$

$(t-2,5k)^2 - 2,5k^2 = 0$

$(t-2,5k-k\sqrt{\tfrac52})(t-2,5k+k\sqrt{\tfrac52})=0$

$\left[\begin{array}{l} t=k(2,5+\sqrt{\frac52}), \\ t=k(2,5-\sqrt{\frac52}); \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^3=k^3(2,5+\sqrt{\frac52})^3 \\ t^3=k^3(2,5\cancel{+1}-\sqrt{\frac52})^3 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 5+x=(5-x)(2,5+\sqrt{\frac52})^3, \\ 5+x=(5-x)(2,5\cancel{+\sqrt{\frac52}}-\sqrt{\frac52})^3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5+x=1,5+5\sqrt{\frac52}-2,5x-\sqrt{\frac52}\cdot x, \\ 5+x=1,5+5\sqrt{\frac52}-2,5x+\sqrt{\frac52}\cdot x; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1,5+5\sqrt{\frac52}}{3,5+\sqrt{\frac52}} \\ x=\frac{2,5+5\sqrt{\frac52}}{3,5-\sqrt{\frac52}} \end{array}\right. \Rightarrow)$?

10. $\frac12+\frac16+\ldots+\frac1{342} = \frac12+\frac16+\ldots+\frac{1}{19\cdot18} = \frac{18}{19}$

Для посл-ти $1,3,5\ldots 2n+1$

$a_1 = 1$

$d=2$

чтобы от 1 дойти до $2n+1$, нужно сделать n шаг., не включая самит.

$S = \frac{a_1+a_k}{2}k = \frac{1+2n+1}{2}\cdot \cancel{(n+1)} (n+1)(n+1)$, $n \in N(1)$

$\frac{n^2+2n+1}{\frac{18}{19}} = \cancel{19\cdot18}\ 19\cdot18.$

$(n+1)^2 = 18^2$

$\left[\begin{array}{l} n+1=18, \\ n+1=-18; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=17 \\ n=-19 \text{ — не соответствует чи...} \end{array}\right.$

Ответ: $n=17$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 19220

3. $\frac{tg\,t}{\cos^2 5t} - \frac{tg\,5t}{\cos^2 t} = 0$, $\cos 5t \neq 0$, $\cos t \neq 0$

$\frac{tg\,t}{\cos^2 5t} = \frac{tg\,5t}{\cos^2 t}$

$tg\,t \cdot \cos^2 t = tg\,5t \cdot \cos^2 5t$

$\sin t \cos t = \sin 5t \cos 5t$

$\sin 2t = \sin 10t$

$\sin 10t - \sin 2t = 0$

$\cos 6t \cdot \sin 4t = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos 6t = 0, \\ \sin 4t = 0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}6t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ 4t = \pi n, n \in Z;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, k \in Z, \\ t = \frac{\pi n}{4}, n \in Z;\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l}\cos 5t \neq 0, \\ \cos t \neq 0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}5t \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z, \\ t \neq \frac{\pi}{2} + \pi d, d \in Z;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}t \neq \frac{\pi}{10} + \pi m, m \in Z. \\ t \neq \frac{\pi}{2} + \pi d, d \in Z.\end{array}\right.$

Так как корней вида $\frac{\pi}{10} + \pi m$ нет, то проверить нужно 2-е условие.

$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi d \;/\cdot \frac{12}{\pi}$

$1 + 2k = 6 + 12d$

$2k = 12d + 5$

$k = 6d + 2{,}5$ – если k – целое, то d точно не целое $\Rightarrow t = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, k \in Z$ подходит.

$\frac{\pi n}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi d \;/\cdot \frac{4}{\pi}$

$n = 2 + 4d$

$4d = n - 2$

$d = \frac{n-2}{4} = \frac{n}{4} - 0{,}5$ – d целое при $n \in [2, 6, 10 \ldots] \Rightarrow$ эти значения n нужно убрать.

$\left[\begin{array}{l}t = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, k \in Z. \\ t = \frac{\pi n}{4}, n \in Z, n \neq 2 + 4d, d \in Z.\end{array}\right.$

+

9. $9^x+(b^2+6)\cdot 3^x-b^2+16=0$

$3^x(3^x+b^2+6)=-16+b^2$

Если в правой части $b^2-16>0$, то в левой всегда можно подобрать сколь ~~угодный~~ $\cancel{x}$ угодно малый x, удовлетворяющий уравнению, следовательно, если корней нет, то $b^2-16\le 0$

$b^2\le 16$

$b\in[-4;4]$

Ответ: $b\in[-4;4]$

5. Кол-во спирта – геометрическая прогрессия, $q=\frac{2}{3}$, $b_1=1$.
По условию задачи составим неравенство:

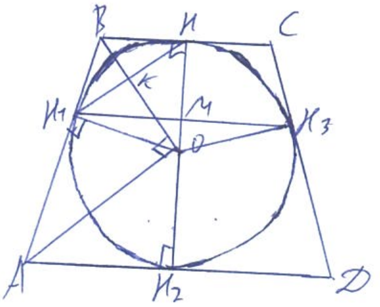
$\left(\frac{2}{3}\right)^k<0{,}1$

$10\left(\frac{2}{3}\right)^k<1$

$k_{min}=6, \left(\frac{2}{3}\right)^{k_{min}}=\frac{64}{729}<0{,}1$

Ответ: $k_{min}=6$

8.



Дано:

$\square ABCD$ – равнобедренная трапеция, $BC\parallel AD$

Окр $(O; OH_1)$ – вписанная.

$OH_3\perp CD$, $H_3\in CD$, $OH\perp BC$, $H\in BC$, $OH_2\perp AD$, $H_2\in AD$,

$OH_1\perp AB$, $H_1\in AB$, $OH_1=5$ см, $H_1H_3=8$ см.

Найти: $S_{\square ABCD}$.

Решение:

1) $S_{\square ABCD}=\frac{1}{2}HH_2\cdot(BC+AD)=\frac{1}{2}HH_2\cdot 2AB=AB\cdot HH_2$, т.к. трапеция равнобедренная, $O\in HH_2$, $HH_2\perp AD$, O – центр вписанной окружности.

2) $OH\perp H_1H_3=M$

$OM=\sqrt{OH_1^2-MH_1^2}$

$MH_1=\frac{H_1H_3}{2}=4$ (см)

$OM=\sqrt{25-16}=3$ (см)

$HM=OH-OM=2$ (см)

3) $HH_1\perp OB=K$

Продолжение [illegible]

т.к. OB — биссектриса $\angle HOH_1$, а $HO=OH_1$, то $H_1H \perp KO$
Рассмотрим $\triangle BHK$ и $\triangle HKO$

$\angle BKH = \angle HKO = 90^\circ$

$\angle BOH = 90^\circ - \angle OBH = \angle BHK$ $\Big| \Rightarrow \triangle BHK \sim \triangle HKO$ по 2 углам $\Rightarrow$

$$\frac{BK}{HK} = \frac{HK}{KO}$$

$$BK \cdot KO = HK^2$$

5) $\triangle HH_1M$

$\angle H_1MH = 90^\circ \Rightarrow HH_1 = \sqrt{HM^2+MH_1^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$ (см)

$KH = \frac{HH_1}{2} = \sqrt{5} \Rightarrow$

~~$BK \cdot BO = 5$~~ $BK \cdot KO = 5$ (см^2)

6) $\angle H_1KO = 90^\circ \Rightarrow KO = \sqrt{H_1O^2 - H_1K^2} = \sqrt{25-5} = 2\sqrt{5}$ (см)

$BK = \frac{5}{KO} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (см)

$OB = BK + KO = 2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 2{,}5\sqrt{5}$ (см)

7) $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$, т.к. $\triangle ABCD$ — равнобедренная.
OB и OA — биссектрисы $\Big| \Rightarrow \angle BOA = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABO$ — прямой

8) $\triangle ABO$ и $\triangle BOH_1$

$\angle ABO$ — общий.

$\angle AOB = \angle BH_1O = 90^\circ$ $\Big| \Rightarrow \triangle ABO \sim \triangle OBH_1$ по 2 углам $\Rightarrow$

$$\frac{AB}{BO} = \frac{BO}{BH_1}$$

$$AB \cdot BH_1 = BO^2$$

$BH_1 = \sqrt{BO^2 - OH_1^2} = \sqrt{\frac{25 \cdot 5}{4} - 25} = 5\sqrt{\frac{5}{4} - 1} = 2{,}5$ (см)

$AB = \frac{BO^2}{BH_1} = \frac{125}{4 \cdot 2{,}5} = \frac{125}{10} = 12{,}5$ (см)

9) $S_{\triangle ABCD} = AB \cdot HH_1 = 12{,}5 \cdot 10 = 125$ (см^2)

Ответ: $S_{\triangle ABCD} = 125$ см^2