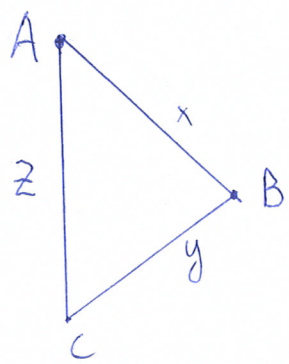
№5

Обозначим первую станцию буквой A, вторую – B, третью – C. Расстояние между A и B = x, между B и C = y, между A и C = z. x, y, z > 0



Из условий: $\begin{cases} x+y=3z \ (1) \\ z+y=x+a,\ a>0 \ (2) \\ x+z=60 \ (3) \end{cases}$

Из (1) $\Rightarrow y=3z-x$

Из (3) $\Rightarrow z=60-x \Rightarrow y=180-4x$

Тогда, зная, что $z+y=x+a$, подставим z и y в это уравнение: $240-5x=x+a$

$240-6x=a \Rightarrow 6(40-x)=a$. НЕВЕРНО

Значит вариантов для a – 39, т.к. $x>0$, $a>0$.

Примечание: $a \neq 0$, т.к. $x<z+y$ из нер-ва треуг.

То есть все "иксы" от 1 до 39 включительно

Подставим $a=42$ и решим систему уравнений. $6(40-x)=42 \Rightarrow 40-x=7 \Rightarrow x=33$

~~$\begin{cases} x+y=3z \\ z+y=x+a \end{cases}$~~ $\begin{cases} x+z=60 \Rightarrow z=60-x=27 \\ x+y=3z \end{cases}$

$\Downarrow$

$y=3z-x=48$

(6)

Ответ: расст-е между первой и второй станцией = 33, между второй и третьей = 48, между первой и третьей = 27

$= \frac{1}{n-k+1} \cdot \frac{n-k+1}{n-k} = \frac{1}{n-k}$ – доказано.

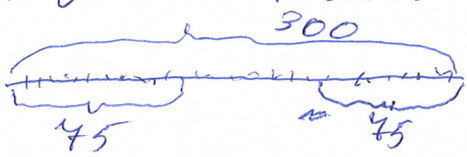
(7)

Подставим $k=2021$, $n=2022$:

$S_n = \frac{1}{2022-2021+1} = \frac{1}{2}$ Ответ: $\frac{1}{2}$

№4

Поделим трубу на 300 частей по одному сантиметру. Посчитаем вероятность того, что „первое загадывание" будет удовл. нашим условиям. Нам нужно, чтобы кусочек, который отвалился, был больше 75 см.



– $\frac{148}{300}$ $\frac{152}{300}$

Теперь вероятность того, что второй и третий кусочки попадут в диапазон: У нас может остаться от 225 до 150 см

Решения нет

(0)

№3
$f\left(\frac{a+2b}{3}\right)=\frac{f(a)+2f(b)}{3}$; $f(2021)-?$

$f(1)=1$; $f(4)=4$

Пусть $a=1, b=4 \Rightarrow f\left(\frac{9}{3}\right)=f(3)=\frac{f(1)+2f(4)}{3}=5$

Пусть $a=4, b=1 \Rightarrow f\left(\frac{6}{3}\right)=f(2)=\frac{f(4)+2f(1)}{3}=3$

$f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=5$, $f(4)=7$. Мы видим закономерность: $f(t)=2t-1$. ~~Докажем ее с помощью мат. индукции:~~ — не доказано

~~Б.И. $f(1)=1$, $f(2)=3$~~

~~Ш.И. Пусть для числа $\frac{a+2b}{3}$ это условие выполняется.~~

~~Докажем для $\frac{a+2b}{3}+1$:~~

~~$f\left(\frac{a}{3}+\frac{2b}{3}\right)=\frac{f(a)}{3}+\frac{2f(b)}{3}$~~ $f\left(\frac{a+2b}{3}\right)=\frac{2a+4b}{3}-1$

~~$f\left(\frac{a+2b}{3}+1\right)$~~ — сделаем „аналогично" с изнач. функцией.

~~$f\left(\frac{a+2b}{3}+\frac{3}{3}\right)=\frac{f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+}{3}$~~

(4)

~~Ш.И. Пусть для чисел $<\frac{a+2b}{3}$ это условие вып-ся.~~

~~Докажем для $\frac{a+2b}{3}$: $f\left(\frac{a+2b}{3}\right)=\frac{f(a)+2f(b)}{3}=\frac{2a-1+4b-2}{3}=$~~

~~$=\frac{2a+4b}{3}-1$ ч.т.д.~~

Эта закономерность — прямая $\Rightarrow$ она принимает только одно значение при $t=2021$. Подставим:
$f(2021)=2\cdot2021-1=4041$. Ответ: 4041

№ 2

$x_0 = \frac{1}{n}$; $x_k = \frac{1}{n-k}(x_0 + x_1 + \dots + x_{k-1})$, $k = 1, 2, \dots, n-1$

$n = 2022$, найти $S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1}$.

Запишем начало суммы:

$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\right) + \dots$

$\frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n-1} = \frac{1}{n-1}$

$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}\cdot$

$\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(1 + \frac{1}{n-2}\right) = \frac{1}{n-2}$

Мы видим закономерность, что сумма первых k слагаемых $= \frac{1}{n-k+1}$.

Тогда зная, что $S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1}$ количество всех таких слагаемых $= n-1 = 2021$ =>

$\Rightarrow S_n = \frac{1}{2022-2021+1} = \frac{1}{2}$. Ответ: $\frac{1}{2}$

Докажем закономерность по индукции:

Б.И. доказана выше

Ш.И. Пусть для k слагаемых это работает. Док. для $k+1$:

$\underbrace{x_0 + x_1 + \dots + x_k}_{\frac{1}{n-k+1}} + x_{k+1} = \frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{n-k-1+1}\cdot(x_0 + x_1 + \dots + x_k) =$

$= \frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{n-k}\cdot\left(\frac{1}{n-k+1}\right) = \frac{1}{n-k+1}\left(1 + \frac{1}{n-k}\right) =$

см. след. страницу

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания
г. Екатеринбург, МАОУ СОШ с углубленным изучением отдельных предметов № 53

Шифр 91802 Класс 10

Вариант 12 Дата 19.02.2022

Заполняется проверяющим строго по образцу. Образец заполнения: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	7	4	0	6					

Оценка цифрами: 22 Оценка прописью: ДВАДЦАТЬ ДВА Подпись:

№1

$x^9-2021x^3+\sqrt{2022}=0$

$x^3=t \Rightarrow t^3-2021t+\sqrt{2022}=0$

Заметим, что $t=-\sqrt{2022}$ является корнем уравнения. Подставим $t=-\sqrt{2022}$, чтобы убедиться в этом.

$-\sqrt{2022}\cdot(-\sqrt{2022})\cdot(-\sqrt{2022})-2021\cdot(-\sqrt{2022})+\sqrt{2022}=0$

$-2022\sqrt{2022}+2021\sqrt{2022}+\sqrt{2022}=0$

$0=0 \Rightarrow$ мы доказали, что $t=-\sqrt{2022}$ – корень.

5

Поделим многочлен $t^3-2021t+\sqrt{2022}$ на $(t+\sqrt{2022})$ схемой Горнера:

	1	0	-2021	$\sqrt{2022}$
$-\sqrt{2022}$	1	$-\sqrt{2022}$	1	0

$\Rightarrow$ остается квадратный трехчлен

$t^2-\sqrt{2022}t+1=0$

$D=(\sqrt{2022})^2-4\cdot1\cdot1=2018$

$\Downarrow$

$t_{1,2}=\frac{\sqrt{2022}\pm\sqrt{2018}}{2}$

Сделаем обратную замену: $x=\sqrt[3]{t}$

Тогда $x=-\sqrt[6]{2022}$, $x=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2022}+\sqrt{2018}}{2}}$, $x=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2022}-\sqrt{2018}}{2}}$

Ответ: $x=-\sqrt[6]{2022}$, $x=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2022}+\sqrt{2018}}{2}}$, $x=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2022}-\sqrt{2018}}{2}}$