



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания

Казанский национальный исследовательский
технологический университет (Математика)

Шифр 93020 Класс 11

Вариант 21 Дата 19.02.2022



$$\begin{cases} 4m \leq 3(m+1)(4-m) \\ 21(m+1)(4-m) \leq 50m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3m^2 - 5m - 12 \leq 0 \\ 21m^2 - 13m - 84 \geq 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} \leq m \leq 3 \\ m \geq \frac{7}{3} \\ m \leq -\frac{12}{7} \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{3} \leq m \leq 3 \rightarrow$$

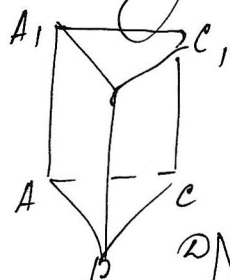
$$\rightarrow \frac{20}{3} \leq 2(m+1) \leq 8 \rightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{1}{2(m+1)} \leq \frac{3}{20} \rightarrow$$

$$\rightarrow 0,125 \leq \frac{1}{2(m+1)} \leq 0,15 \Rightarrow$$

$$12,5\% \text{ до } 15\%$$

Ответ: 12,5%; 15%

Задача 6



ABCD - куб, A, B, C, D - вершины
CD - диаметр $\Rightarrow \triangle DAC$ - равносторонний

$$AC^2 = DC^2 - DA^2$$

$$AC^2 = 144 - 16 \cdot 6 = 12$$

$$AC = 4\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{DAC} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

OABC - равносторонний пирамида

$$PC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC = \frac{\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 6$$

$$\Rightarrow HC = 4, \text{ и } OH = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$HH_1 = OH \cdot 2 = 4\sqrt{5}$$

$$V = HH_1 \cdot S_{ABC} = 4\sqrt{5} \cdot 12\sqrt{3} = 48\sqrt{15}$$

Ответ: $24\sqrt{15} \text{ см}^3$



Ответ: $x = \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2021}-45}{2}}; \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2021}+45}{2}}; \sqrt[6]{2021}$

Задача 2

$f(x) + (0,5+x)f(1-x) = 1$

Рассмотрим ф.в.в.о при

$x = 0,5 + e$ и $x = 0,5 - e$

$f(0,5+e) + (0,5+0,5+e)f(1-0,5-e) = 1$

$f(0,5-e) + (0,5+0,5-e)f(1-0,5+e) = 1$

$f(0,5+e) + (1+e)f(0,5-e) = 1$

$f(0,5-e) + (1-e)f(0,5+e) = 1$

при e система имеет единств-е решение при $e \neq 0$

$f(0,5+e) = -\frac{1}{e}$

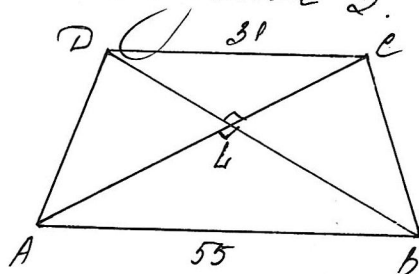
$f(0,5-e) = \frac{1}{e}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{1-2x}$ при $x \neq \frac{1}{2}$

$(f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2})$

Ответ: $f(x) = \frac{2}{1-2x}$

Задача 3.



пусть L - точка пересечения диаг-л
 AC и DB .

$\angle ALB = \angle DLC = 90^\circ$

$\triangle ALB \sim \triangle CLD$

$\Rightarrow \overline{LC} = \frac{31}{55}$, а $\overline{LD} = \frac{31}{55} \overline{LB}$



пусть $\vec{AL} = \vec{k}$, а $\vec{BL} = \vec{m}$

т.к. $(\vec{k}; \vec{m}) = 0$ (т.к. $\triangle ALB$ - прямоугольный), $\Rightarrow \vec{AD} = \vec{AL} + \vec{LD} =$
 $= \vec{k} + \frac{31}{55} \vec{m}$,

тогда $\vec{BC} = \vec{BL} + \vec{LC} = \vec{m} + \frac{31}{55} \vec{k} \Rightarrow (\vec{AD}, \vec{BC}) =$
 $= (\vec{k} + \frac{31}{55} \vec{m}; \vec{m} + \frac{31}{55} \vec{k}) = \frac{31}{55} (|\vec{k}|^2 + |\vec{m}|^2)$

т.к. $\triangle ALB$ - прямоугольный, то по т-ме Пифагора $|\vec{AL}|^2 + |\vec{BL}|^2 = |\vec{AB}|^2$,
 но т.к. $\vec{AL} = \vec{k}$, а $\vec{BL} = \vec{m}$, $\Rightarrow |\vec{k}|^2 + |\vec{m}|^2 = |\vec{AB}|^2$,

тогда $\frac{31}{55} (|\vec{k}|^2 + |\vec{m}|^2) = \frac{31}{55} |\vec{AB}|^2 = \frac{31 \cdot 55^2}{55} = 31 \cdot 55 = 1705$

Ответ: $(\vec{AD}, \vec{BC}) = 1705$

Задача 5

	1 пакет Рапиерги	1 пакет Двандерги	1 пакет Триниерги
цена опта тыс. руб	k		
кол-во пакетов	l	ml	l(m+1)
цена пакета	kl	4kl	5kl

цена 1 пакета из 2 = $\frac{4k}{m}$ тыс. руб.
 а из 3 пак = $\frac{5k}{m+1}$ тыс. руб.,
 при этом $0 < m < 4$
 тогда наим. вел-на = $\frac{l}{2l(m+1)} =$
 $= \frac{1}{2(m+1)}$

$$\begin{cases} 16 \leq \frac{4k}{l} - k \leq 20 \\ 42 \leq \frac{5k}{m+1} \leq 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{16m}{4-m} \leq x \leq \frac{20k}{4-m} \\ \frac{42(m+1)}{5} \leq x \leq 12(m+1) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 16m \leq 12(m+1) \\ \frac{42(m+1)}{5} \leq \frac{20k}{4-l} \end{cases}$$

$$\frac{16m}{4-m} \leq 12(m+1)$$

$$\frac{42(m+1)}{5} \leq \frac{20m}{4-m}$$



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



Площадка написания

Казанский национальный исследовательский
технологический университет (Математика)

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 93020 Класс

11

Вариант 21 Дата 19.02.2022



Заполняется проверяющим строго по образцу

Образец заполнения:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	5	1	0	1	5	0	0	2	0
1	0	1	5	0	0	2	0	1	0

Оценка цифрами

Оценка прописью

Подпись

0	6	0	шестьдесят	
---	---	---	------------	--

Задача 1.

$$x^9 - 2022x^3 + \sqrt{2021} = 0$$

пусть $x^3 = e$, тогда $x^9 = e^3$

$$e^3 - 2022e + \sqrt{2021} = 0$$

$$2022 = (\sqrt{2021})^2 + 1$$

$$e^3 - ((\sqrt{2021})^2 + 1)e + \sqrt{2021} = 0$$

$$e^3 - (\sqrt{2021})^2 e - e + \sqrt{2021} = 0$$

$$e(e^2 - (\sqrt{2021})^2) - (e - \sqrt{2021}) = 0$$

$$e((e - \sqrt{2021})(e + \sqrt{2021})) - (e - \sqrt{2021}) = 0$$

$$(e - \sqrt{2021})(e(e + \sqrt{2021}) - 1) = 0$$

$$(e - \sqrt{2021})(e^2 + \sqrt{2021}e - 1) = 0$$

$$e - \sqrt{2021} = 0$$

$$e = \sqrt{2021}$$

$$e^2 + \sqrt{2021}e - 1 = 0$$

$$D = (\sqrt{2021})^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 = 2021 + 4 = 2025 = 45^2$$

$$e = \frac{-\sqrt{2021} + 45}{2}$$

$$e = \frac{-\sqrt{2021} - 45}{2}$$

вернемся к замене:

$$x^3 = \sqrt{2021}$$

$$x = \sqrt[3]{2021}$$

$$x^3 = \frac{-\sqrt{2021} + 45}{2}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2021} + 45}{2}}$$

$$x^3 = \frac{-\sqrt{2021} - 45}{2}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2021} - 45}{2}}$$