



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



Площадка написания

Казанский национальный исследовательский
технологический университет (Математика)

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 99628 Класс 10

Вариант 22 Дата 19.02.2022



Заполняется проверяющим строго по образцу

Образец заполнения:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
0	5				0	2			3

Оценка цифрами	Оценка прописью	Подпись
0 3 7	тридцать семь	<i>Евгений</i>

$$x^9 - 2022x^3 - \sqrt{2021} = 0$$

$$\text{пусть } t = x^3 \Rightarrow$$

$$t^3 - 2022t - \sqrt{2021} = 0$$

$$t^3 - 2021t - t - \sqrt{2021} = 0$$

$$t(t^2 - 2021) - 1(t + \sqrt{2021}) = 0$$

$$t(t - \sqrt{2021})(t + \sqrt{2021}) - 1(t + \sqrt{2021}) = 0$$

$$(t^2 - \sqrt{2021}t)(t + \sqrt{2021}) - 1(t + \sqrt{2021}) = 0$$

$$(t + \sqrt{2021})(t^2 - \sqrt{2021}t - 1) = 0$$

$$t + \sqrt{2021} = 0$$

$$t^2 - \sqrt{2021}t - 1 = 0$$

$$t = -\sqrt{2021}$$

$$D = (\sqrt{2021})^2 + 4 = 2025 = 45^2$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{2021} + 45}{2}$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{2021} - 45}{2}$$

$$x = \sqrt[3]{t} \Rightarrow x_1 = \sqrt[3]{-\sqrt{2021}} = -\sqrt[3]{2021}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2021} + 45}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2021} - 45}{2}}$$

Ответ $x = -\sqrt[3]{2021}$; $x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2021} + 45}{2}}$; $x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2021} - 45}{2}}$

№4. Заметим, что для того чтобы все три части можно было использовать их длина должна быть больше метра у каждой и меньше двух метров у каждой. Пусть x, y, z длины трех труб соответственно. $x + y + z = 400$ если x, y или $z > 200$ то



Площадка написания

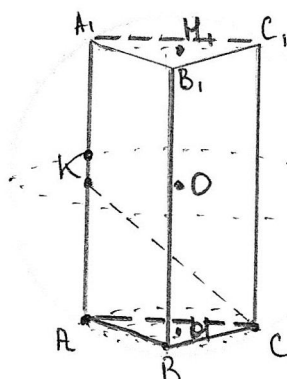
Казанский национальный исследовательский технологический университет (Математика)

№4 продолжение: то сумма двух других < 2 $\Rightarrow$ хотя бы одна < 1
 тогда длина $\in (0; 1)$ может быть $x \in (0; 1); y \in (0; 1); z \in (0; 1)$
 тогда найдем вероятность того разделим на группы
 равные по длине промежутка $(0; 1)$ $(1; 2)$ $(2; 3)$ $(3; 4)$ у каждого по 4 группы
 для x, y, z $(0; 1)$ $(1; 2)$ $(2; 3)$ $(3; 4)$ $\Rightarrow$ всего 12 групп. (промежутки в которых могут лежать x, y, z)
 Найдем кол-во различных троек (x, y, z) $\Rightarrow$ их будет
 $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

А благоприятная "тройка" всего одна это

$$(1; 2)_x (1; 2)_y (1; 2)_z \Rightarrow P = \frac{1}{64} \quad \text{Ответ } \frac{1}{64}.$$

№6.



Заметим что так как призма правильная то центр сферы лежит на HH_1 , а HH_1 это центры $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, а в сфере и все части сферы симметричны относительно HH_1 так она проходит через O - центр сферы.

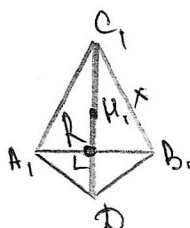
тогда со- радиус и точка O будет находится от HH_1 - на таком же расстоянии как и сфера HH_1 .
 Тогда пусть $AB = x$ $AA_1 = y$ и $O \in (A_1B_1C_1)$
 в $\triangle AKC$ $\angle A = 90^\circ \Rightarrow KC = \sqrt{x^2 + y^2}$ $KC = \sqrt{AK^2 + AC^2} = \sqrt{(\frac{1}{2}y)^2 + x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 12$. по т. Пифагора
 $CH = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ (так H - центр) $\Rightarrow OH_1 = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.



№ продолжение

Вынесем плоскость $A_1B_1C_1$.

$\triangle A_1B_1C_1$ - правильный.



$$C_1B_1 = x$$

$$H_1D = \frac{x\sqrt{3}}{3}, \text{ а } H_1R = \frac{x\sqrt{3}}{6} \Rightarrow RD = \frac{x\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{тогда } A_1R = RB_1 = \frac{1}{2}x$$

тк CR - медиана и высота

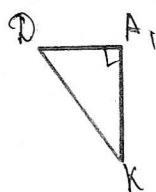
$$\triangle A_1RD: \angle R = 90^\circ$$

$$A_1D^2 = \frac{1}{3}x^2. \text{ Вынес}$$

$$A_1D = \sqrt{A_1R^2 + RD^2} = \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^2}$$

по теор. Пифагора.

Вынесем плоскость DA_1K .



тк ПРИЗМА ПРЯМОУГОЛЬНАЯ.

$$\text{тогда } A_1K^2 + A_1D^2 = DK^2 \text{ (по теор. Пифагора)}$$

$$\left(\frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{1}{3}x^2 = 8 \Rightarrow \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 8 \text{ а } x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 12$$

составим систему

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 8 \\ x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x^2 = 4 \\ x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 6 \\ \frac{1}{4}y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{6} \\ y = 2\sqrt{6} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt{6} \\ y = -2\sqrt{6} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{6} \\ y = 2\sqrt{6} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{6} \\ y = -2\sqrt{6} \end{cases} \text{ но } x, y > 0 \Rightarrow$$

$$(x, y) = (\sqrt{6}; 2\sqrt{6}) \text{ тогда.}$$

$$V_{\text{призмы}} = S_{ABC} \cdot AA_1 = \frac{x \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot y = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{6} =$$

$$= \frac{6 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{4} = 3\sqrt{18} = 3 \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \text{ куб.ед. Ответ } 9\sqrt{2} \text{ (куб.ед.)}$$