



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



Площадка написания

Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана

1. Используйте только **размеченные** стороны листов.
2. Заполните **номер варианта** и **номер страницы** в поле внизу.

Математика

Шифр 96622 Класс 11

Вариант 2 1 Дата 19.02.2022



$\sqrt{3}$ (предположение)

$$AD^2 + DC^2 + CB^2 + 2(\vec{DC} \cdot \vec{AD} + \vec{DC} \cdot \vec{CB}) + 2 \cdot \vec{AD} \cdot \vec{CB} = AB^2$$

Подставим всё, что знаем:

$$55^2 + 31^2 + 31^2 + 55^2 + 3 \cdot 31^2 - 86^2 + 2 \cdot \vec{AD} \cdot \vec{CB} = 55^2$$

$$2 \cdot \vec{AD} \cdot \vec{CB} = 86^2 - 5 \cdot 31^2 - 55^2 = 55^2 + 31^2 + 2 \cdot 55 \cdot 31 - 55^2 - 31^2 - 4 \cdot 31^2 = 31 \cdot 110 - 31 \cdot 124 = -31 \cdot 14; \quad \vec{AD} \cdot \vec{BC} = -31 \cdot 7 = -217;$$

Ответ: -217 1705



✓ 5

Условие: (a_1 - кол-во акций в Развертти, a_2 - кол-во акций в Дванертт, a_3 - кол-во акций в Тринертт); x_1 - цена одной акции в Развертти, x_2 - цена одной акции в Дванертт и x_3 - цена одной акции в Тринертт)

$$\begin{cases}
 a_1 + a_2 = a_3 \\
 a_2 \cdot x_2 = \frac{a_1 x_1}{4} \\
 x_1 a_1 + x_2 a_2 = x_3 a_3 \\
 16 \leq x_1 - x_2 \leq 20 \\
 42 \leq x_3 \leq 60
 \end{cases}$$

5

Найти: $\min$ и $\max$ от $\frac{a_2}{a_1 + a_2 + a_3} \cdot 100$

Решение

1) Т.к. $a_1 + a_2 = a_3$, то $\frac{a_2 \cdot 100}{a_1 + a_2 + a_3} = \frac{a_2 \cdot 100}{2a_3}$

2) $a_2 x_2 = \frac{a_1 x_1}{4}$; $a_1 x_1 = 4a_2 x_2$; $\Rightarrow 5a_2 x_2 = x_3 a_3$; $a_3 = \frac{5x_2 a_2}{x_3}$

$a_1 = \frac{4a_2 x_2}{x_1}$; $\Rightarrow$ Т.к. $a_1 + a_2 = a_3$, то $\frac{4a_2 x_2}{x_1} + a_2 = \frac{5x_2 a_2}{x_3}$; Т.е. $\frac{4x_2}{x_1} + 1 = \frac{5x_2}{x_3}$

3) $\frac{a_2 \cdot 100}{2a_3} = \frac{a_2 \cdot x_3 \cdot 100}{2 \cdot 5x_2 a_2} = \frac{10x_3}{x_2}$

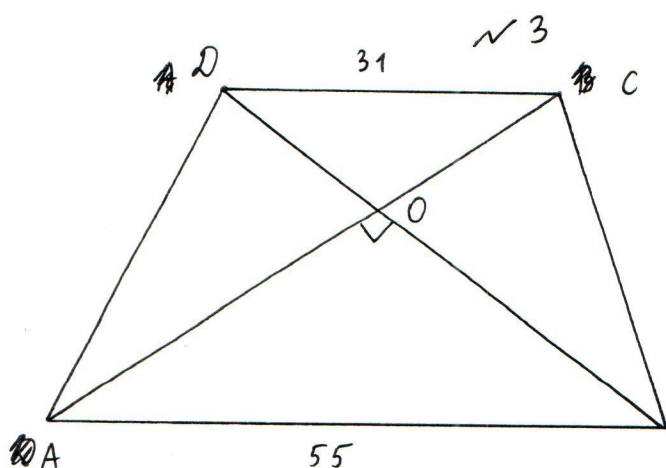
4) Т.к. $42 \leq x_3 \leq 60$ и $16 \leq x_1 - x_2 \leq 20$, то $\frac{21}{8} \leq \frac{x_3}{x_1} - \frac{x_2}{x_3} \leq \frac{1}{3}$

5) из п. 2 $\frac{4x_2}{x_1} + 1 = \frac{5x_2}{x_3} \Rightarrow \frac{4x_3}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} = 5$; Т.е. $\frac{x_3}{x_1} = \frac{5}{4} - \frac{x_3}{4x_2}$ Подставим

в п. 4. $\frac{21}{8} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \frac{x_3}{x_2} - \frac{x_3}{x_2} \leq \frac{1}{3}$; $\frac{11}{8} \leq \frac{5}{4} \frac{x_3}{x_2} \leq \frac{7}{4}$

5)

?



Решение:

$$1) \begin{cases} AO^2 + BO^2 = 55^2 \\ DO^2 + OC^2 = 31^2 \end{cases}$$

По т. Пифагора:

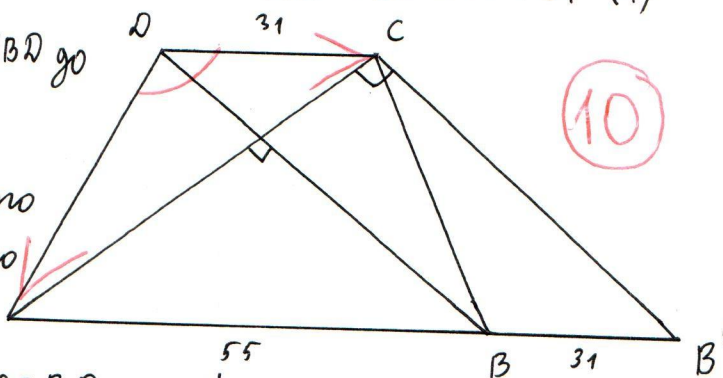
Аналогично,

$$\begin{cases} AO^2 + OD^2 = AD^2 \\ OC^2 + OB^2 = BC^2 \end{cases}$$

Сложим ур-я в обеих системах и получим, что

$$55^2 + 31^2 = AO^2 + OD^2 + OC^2 + OB^2 = AD^2 + BC^2 \Rightarrow AD^2 + BC^2 = 55^2 + 31^2 \quad (1)$$

2) Сделаем доп. построение: $CB' \parallel BD$ до пересечения с AB .



Т.к $DCB'B$ - параллелограмм, то

$CD = B'B = 31$. Т.к $AC \perp BD$, то

и $B'C \perp AC$. По т. Пифа-

гора: $AC^2 + B'C^2 = AB'^2$; Т.к $B'C = BD$ и $AB' = 86$, то

$$AC^2 + BD^2 = 86^2 \quad (2)$$

$$3) \text{ По т. косинусов для } \triangle ADC: AD^2 + CD^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = AC^2$$

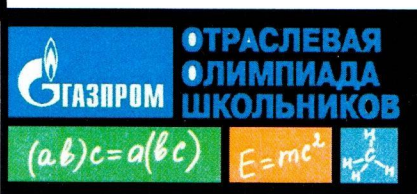
$$\text{По т. косинусов для } \triangle DCB: CD^2 + BC^2 - 2 \cdot \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CB} = BD^2$$

$$\text{Сложим ур-я: } AD^2 + CD^2 \cdot 2 + BC^2 = AC^2 + BD^2 + 2(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CB})$$

$$\text{Воспользуемся ур-ями (1) и (2): } 55^2 + 31^2 + 2 \cdot 31^2 = 86^2 + 2(\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CB})$$

$$\text{Значит, } 2(\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CB}) = 55^2 + 31^2 \cdot 3 - 86^2.$$

3) Заметим, что $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$; Возведем обе части в квадрат.



Площадка написания
Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана

1. Используйте только **размеченные** стороны листов.
2. Заполните **номер варианта** и **номер страницы** в поле внизу.

Математика

Шифр 96622 Класс 11

Вариант 21 Дата 19.02.2022



Заполняется проверяющим **строго по образцу**

Образец заполнения: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	1	0	1	0	0	5	3	0	
Оценка цифрами			Оценка прописью				Подпись		
60			шестьдесят				Кеш-		

№1

$$x^9 - 2022x^3 + \sqrt{2021} = 0$$

Пусть $x^3 = y$, тогда ур-е имеет вид:

$$y^3 - 2022y + \sqrt{2021} = 0$$

Заметим, что $y = \sqrt{2021}$ - корень: $2021\sqrt{2021} + \sqrt{2021} - 2022\sqrt{2021} = 0$

По схеме Горнера: $y = \sqrt{2021}$

Значит,

$$y^3 - 2022y + \sqrt{2021} = (y - \sqrt{2021})(y^2 + \sqrt{2021}y - 1)$$

$$y^2 + \sqrt{2021}y - 1 = 0; D = 2021 + 4 = 2025; y = \frac{-\sqrt{2021} \pm 45}{2}$$

Обратная замена:

$$\begin{cases} x^3 = \sqrt{2021} \\ x^3 = -\frac{\sqrt{2021} \pm 45}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{2021} \\ x = \sqrt[3]{\frac{45 - \sqrt{2021}}{2}} \\ x = -\sqrt[3]{\frac{45 + \sqrt{2021}}{2}} \end{cases}$$

Ответ: $\sqrt[6]{2021}; \sqrt[3]{\frac{45 - \sqrt{2021}}{2}}; -\sqrt[3]{\frac{45 + \sqrt{2021}}{2}}$



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$E = mc^2$$



Площадка написания

Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Шифр 96622 Класс 11

Вариант 21 Дата 19.02.2022



№ 6

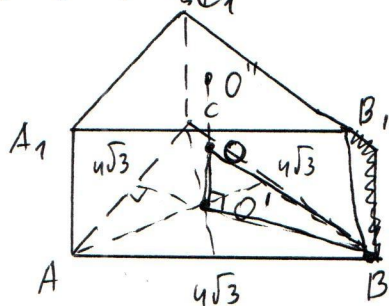
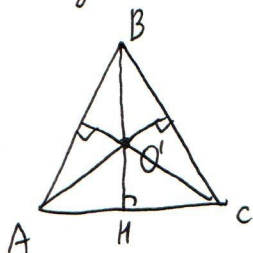
Решение:

1) Так как CD - диаметр, то AD опирается на диаметр, значит $\triangle ADC$ прямоугольный, поэтому $AC^2 = CD^2 - AD^2 = 144 - 96 = 48$;

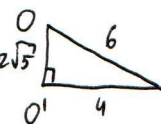
$$AC = 4\sqrt{3};$$

2) Т.к. призма правильная, то центр сферы проецируется в центр основания. (точка O' - центр сферы т. O)

Найдем BO' :



Т.к. $\triangle ABC$ - правильный, то $BO' = \frac{2}{3} BH$. (Т.е. BO' - центр тяжести, пересечения медиан, высот и биссектрис). $BH = \sqrt{BC^2 - \frac{1}{4} AC^2} = \sqrt{48 - 12} = 6$; $BO' = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$;

BO - радиус $\Rightarrow BO = 6$; Рассмотрим $\triangle OO'B$: ; $OO' = \sqrt{OB^2 - O'B^2} = \sqrt{36 - 16} = 2\sqrt{5}$

3) Т.к. ~~призма~~ призма правильная, то OO' - это половина высоты призмы, т.е. (призма не обязательно прямая)

$$H = 2 \cdot OO' = 4\sqrt{5};$$

$$4) V = S(ABC) \cdot 4\sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot \sin 60^\circ \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{5} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 16 \cdot 3 \cdot 4\sqrt{5} = 48\sqrt{15}$$

Ответ: $48\sqrt{15}$



$\sqrt{2}$

Если $f(x) + (0,5+x) f(1-x) = 1$, то пусть $x = 1-y$, т.е.

$f(1-y) + (1,5-y) f(y) = 1$. Имеем систему:

$$\begin{cases} f(x) + (0,5+x) f(1-x) = 1 \\ f(1-x) + (1,5-x) f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(1-x) = 1 - (1,5-x) f(x).$$

Подставим в

1ое ур-е системы:

$$f(x) + (0,5+x)(1 - (1,5-x)f(x)) = 1; \text{ Преобразуем:}$$

$$f(x) + 0,5 - 0,5(1,5-x)f(x) + x - x(1,5-x)f(x) = 1$$

$$f(x)(1 - 0,5(1,5-x) - x(1,5-x)) + 0,5 + x = 1$$

$$f(x)(1 - 0,75 + 0,5x - 1,5x + x^2) = 0,5 - x; \quad (x-0,5)(f(x)(x-0,5)+1) = 0$$

$$f(x) = \frac{0,5-x}{x^2 - x + 0,25} = \frac{(x-0,5)}{(x-0,5)^2} = -\frac{1}{x-0,5} = \frac{1}{0,5-x}$$

$$f(x) = \frac{1}{0,5-x}$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \text{ т.к. } 2 f(\frac{1}{2}) = 1 \text{ (из исходного ур-я);}$$

Ответ: при $x \in (-\infty, 0,5) \cup (0,5; +\infty)$: $f(x) = \frac{1}{0,5-x}$; $x = \frac{1}{2}$, то $f(x) = \frac{1}{2}$

10