

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания

Санкт-Петербургский Государственный электротехнический Университет "ЛЭТИ"

Шифр 97979 Класс 11

Вариант 21 Дата 19.02.2022



Заполняется проверяющим строго по образцу

Образец заполнения:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	7	1	5	5	5	3	0		

Оценка цифрами

Оценка прописью

Подпись

6	7	шестьдесят семь				Вит			
---	---	-----------------	--	--	--	-----	--	--	--

Задача 1:

$$x^9 - 2022x^3 + \sqrt{2021} = 0 \quad (*)$$

Пусть $x^3 = t$, тогда $(*)$ пр. вид:

$$t^3 - 2022t + \sqrt{2021} = 0 \quad (**) \quad t^3 - 2021t - t + \sqrt{2021} = 0 \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow t(t - \sqrt{2021})(t + \sqrt{2021}) - (t - \sqrt{2021}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t - \sqrt{2021})(t^2 + \sqrt{2021}t - 1) = 0 \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2021} \\ t = \frac{-\sqrt{2021} - 45}{2} \\ t = \frac{-\sqrt{2021} + 45}{2} \end{cases}$$

Т.о. $(*) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^3 = \sqrt{2021} \\ x^3 = \frac{-\sqrt{2021} + 45}{2} \\ x^3 = \frac{-\sqrt{2021} - 45}{2} \end{cases} \quad (**)$$

$$\begin{cases} x = \sqrt[6]{2021} \\ x = \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2021} + 45}{2}} \\ x = \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2021} - 45}{2}} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ -\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2021} + 45}{2}}, \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2021} + 45}{2}}, \sqrt[6]{2021} \right\}$

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания

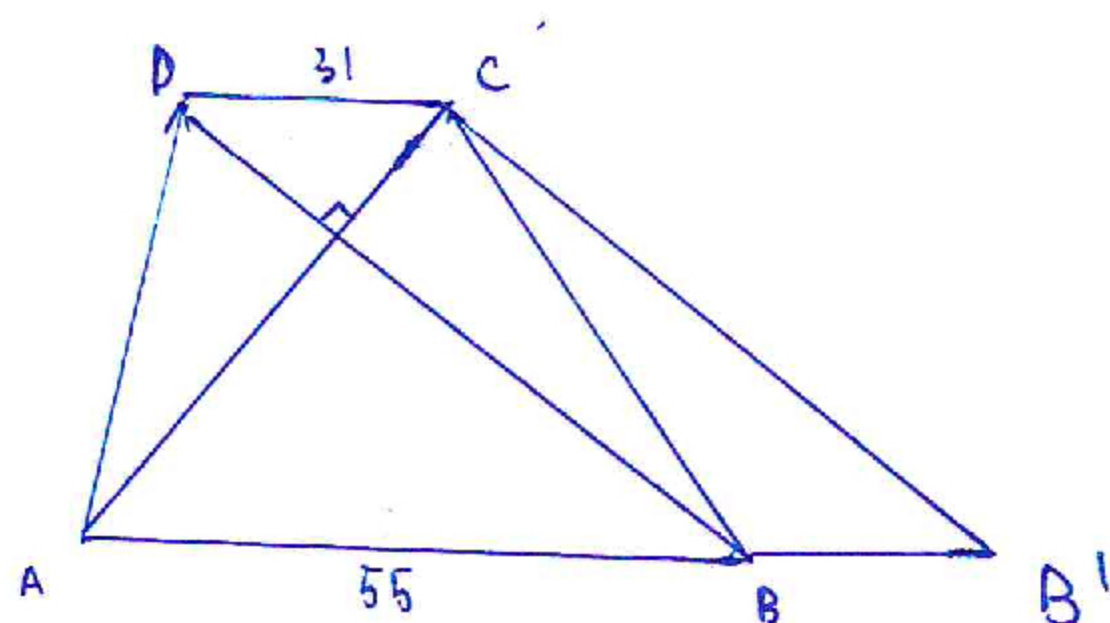
Санкт-Петербургский Государственный
электротехнический Университет "ЛЭТИ"

Шифр 97979 Класс 11

Вариант 21 Дата 19.02.2022



Задача 3:



$$\begin{aligned}
 (1) \quad \vec{AD} \cdot \vec{BC} &= (\vec{AC} + \vec{CD})(\vec{BD} + \vec{DC}) = \underbrace{\vec{AC} \cdot \vec{BD}}_{0 \text{ (cos}(\vec{AC}; \vec{BD})=0)} + \vec{AC} \cdot \vec{DC} + \vec{CD} \cdot \vec{BD} + \vec{CD} \cdot \vec{DC} = \\
 &= \vec{AC} \cdot \vec{DC} - \vec{BD} \cdot \vec{DC} - (\vec{DC})^2 = \\
 &= \vec{DC}(\vec{AC} - \vec{BD}) - (\vec{DC})^2 = \vec{DC} \cdot (\vec{AC} + \vec{BB'}) - (\vec{DC})^2 \quad (\star)
 \end{aligned}$$

$$(2) \text{ Д.н.: } CB' \parallel BD; B' \in (AB).$$

$$\begin{array}{l|l}
 \text{Т.о. } CD \parallel BB' \text{ (трапеция)} & \\
 CB' \parallel BD \text{ (по постро.)} & B'BDC - \text{пар.-м, зн.} \\
 & \vec{DB} = \vec{CB'}; \vec{DC} = \vec{BB'}
 \end{array}$$

$$(3) (\star) = \vec{DC} \cdot (\vec{AC} + \vec{DB}) - (\vec{DC})^2 = \vec{DC} \cdot \vec{AB'} - (\vec{DC})^2 =$$

$$AB' = AB + BB' = AB + DC = 55 + 31 = 86$$

$$(\star) = 31 \cdot 86 - (31)^2 = 31 \cdot 55 = 1705$$

Ответ: 1705

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.



Математика

Площадка написания

Санкт-Петербургский Государственный
электротехнический Университет "ЛЭТИ"

Шифр 97979 Класс 11

Вариант 21 Дата 19.02.2022

Задача 2:

$$f(x) + \left(\frac{1}{2} + x\right) \cdot f(1-x) = 1$$

Подставим $1-x$: $f(1-x) + \left(\frac{3}{2} - x\right) \cdot f(x) = 1 \quad (=)$

$$\Leftrightarrow f(1-x) = 1 - f(x) \cdot \left(\frac{\frac{3}{2} - x}{x + \frac{1}{2}}\right)$$

Полученное выражение для $f(1-x)$ подставим в исходное равенство:

$$f(x) + \left(\frac{1}{2} + x\right) \left(1 - f(x) \cdot \frac{\left(\frac{3}{2} - x\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)}\right) = 1 \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow f(x) + x + \frac{1}{2} - f(x) \cdot \left(\frac{\frac{3}{2} - x}{x + \frac{1}{2}}\right) = 1 \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow f(x) \left(1 + \left(x - \frac{3}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} - x \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow f(x) \left(1 + x^2 - x - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} - x \quad \Leftrightarrow f(x) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - x \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{-1}{x - \frac{1}{2}} \quad \Leftrightarrow f(x) = \frac{-2}{2x - 1} \quad \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{1 - 2x}$$

Ответ: $f(x) = \frac{2}{1 - 2x}$

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания

Санкт-Петербургский Государственный электротехнический Университет "ЛЭТИ"

Шифр 97979 Класс 11

Вариант 21 Дата 19.02.2022

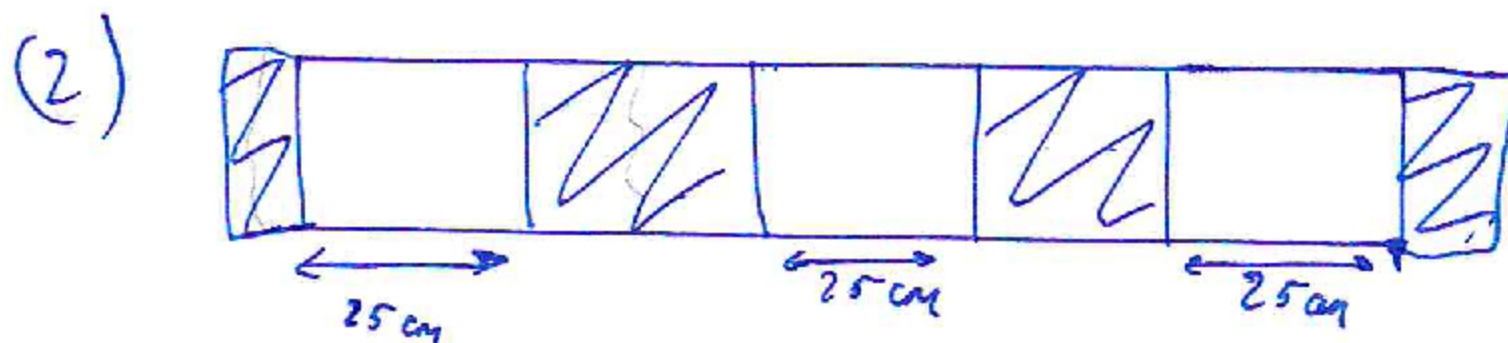


Задача 4:



Вопрос

(1) Условие задачи можно интерпретировать так:
Какова вероятность того, что 3 полученные части трубы будут иметь длину, больше 25 см.



- Выделим 3 участка трубы по 25 см, тогда длина оставшейся части будет равна $100 - 3 \cdot 25 = 25$ см.
- Заметим, что вероятность попадания первого дефекта в оставшуюся часть равна $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.
- В какую бы зону не попал оставшейся части не попал дефект номер 2, мы ~~еще~~ ^{всегда} можем выделить 3 куска по 25 см. (Не ~~зависит~~ ^{важно} в какую зону попал первый дефект). Вероятность этого события как и в первом случае: $\frac{1}{4}$.
- События связаны; зн. суммарная вероятность равна $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

Ответ: $\frac{1}{16}$

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания

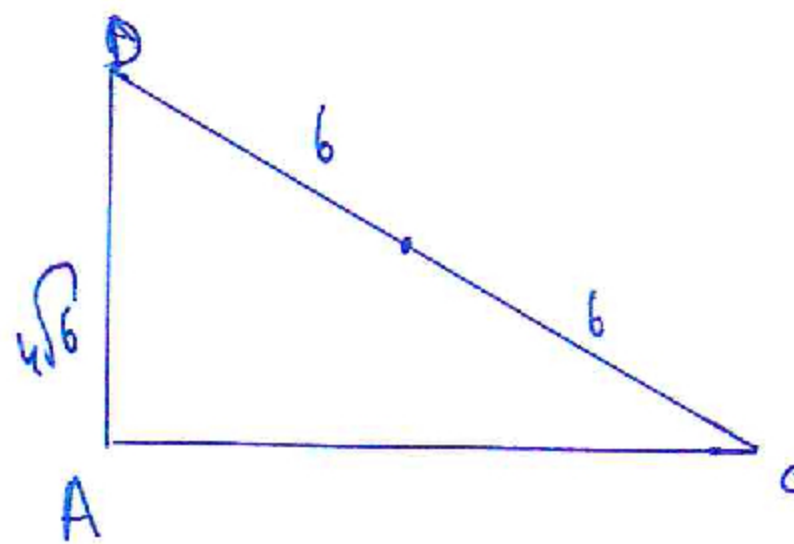
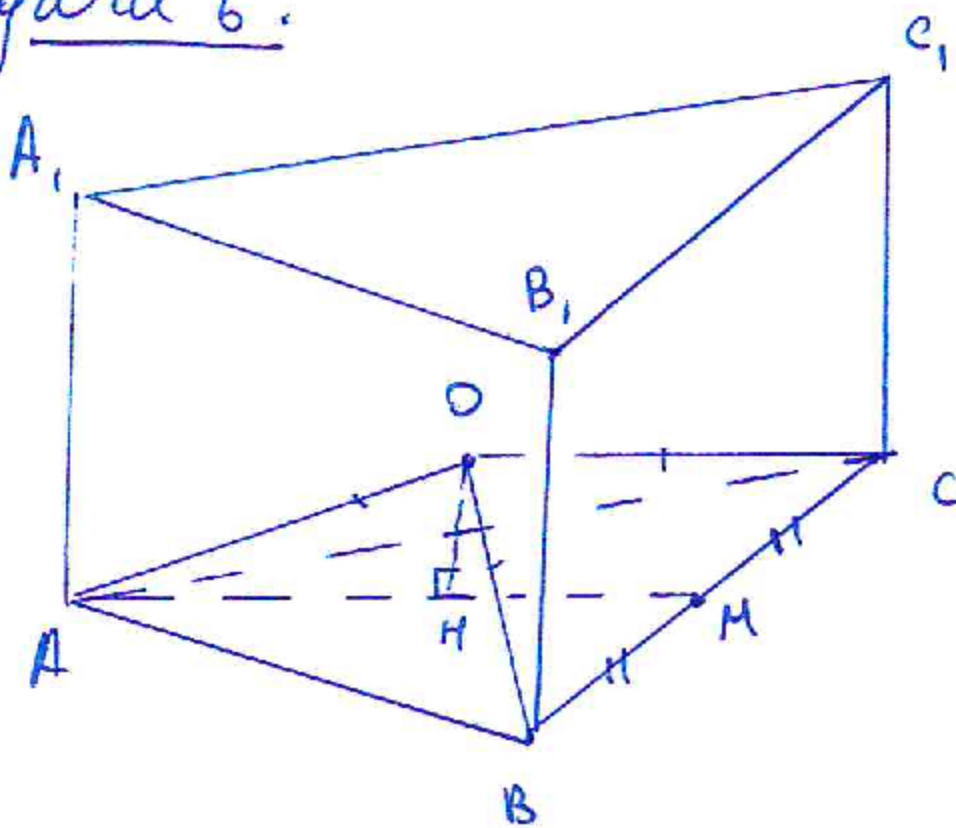
Санкт-Петербургский Государственный электротехнический Университет "ЛЭТИ"

Шифр 97979 Класс 11

Вариант 21 Дата 19.02.2022



Задача 6:



- 1) CD - диаметр, тогда $\angle DAC = 90^\circ$ (как угол на диаметр).
 Тогда $\triangle DCA$ - пр/у: По т. Пифагора: опис. окр.

$$AC^2 = CD^2 - AD^2; \quad AC = \sqrt{12^2 - 16 \cdot 6} = \sqrt{144 - 96} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

- 2) В силу симметрии высота OH правильной призм-ды OABC падает на точку пересек. медиан (высот, бисс-с) р/ст. $\triangle ABC$. По теореме, о точке пересек. медиан:

$$AH = \frac{2}{3} \cdot AM \quad (AM - \text{медиана по постро.})$$

$$AM = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 6 \quad (\text{высота в пр. } \triangle)$$

Т.о.: $AH = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$

- 3) $\triangle AHO$: пр/у: По т. Пифагора: $OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

- 4) В силу симметрии $OH = \frac{1}{2} h$, где h - высота призм.

Т.о. $h = 2OH = 4\sqrt{5}$

5) $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AC^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (4\sqrt{3})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 16 \cdot 3 = 12\sqrt{3}$ (ед. пл.)

6) $V_{\text{призмы}} = h \cdot S_{\triangle ABC} = 4\sqrt{5} \cdot 12\sqrt{3} = 48\sqrt{15}$ (ед. объема)

Ответ: $48\sqrt{15}$ ед. объема.

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.



Математика

Площадка написания

Санкт-Петербургский Государственный электротехнический Университет "ЛЭТИ"

Шифр 97979 Класс 11

Вариант 21 Дата 19.02.2022

Задача 5:

Пусть Введем переменные:

Имя компании	Стоимость 1 акции	Кол-во акций
Раз нефть	S_x	x
Рва нефть	S_y	y
Три нефть	S_z	z

I) Вопрос задачи: ~~$x+y+z$~~ - ?

$$\min \left(\frac{y}{x+y+z} \right) - ? ; \max \left(\frac{y}{x+y+z} \right) - ?$$

II) Из условия составим систему:

$$\begin{cases} x+y=z \\ S_y \cdot y = \frac{1}{4} S_x \cdot x \quad (2) \\ S_y \cdot y + S_x \cdot x = S_z \cdot z \quad (3) \\ S_x - S_y \in [16000; 20000] \quad (4) \\ S_z \in [42000; 60000] \end{cases}$$

Из (2) и (3):

$$S_x \cdot x = 4 S_y \cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 S_y \cdot y = S_z \cdot z \Rightarrow$$

$$\frac{y}{z} = \frac{S_z}{5 S_y}$$

Из (4):

$$S_x - S_y$$

$$\text{III) } \frac{y}{x+y+z} = \frac{y}{2z} \quad (z = x+y)$$

$$\text{Из II получаем: } \frac{y}{2z} = \frac{S_z}{10 S_y} = \frac{1}{10} \cdot \frac{S_z}{S_x - c}$$

$$c \in [16000; 20000]$$

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.



Математика

Площадка написания

Санкт-Петербургский Государственный электротехнический Университет "ЛЭТИ"

Шифр 97979 Класс 11

Вариант 21 Дата 19.02.2022

Задача 5:

Пусть Введем переменные:

Имя компании	Стоимость 1 акции	Кол-во акций
Раз нефть	S_x	x
Два нефть	S_y	y
Три нефть	S_z	z

I) Вопрос задачи: ~~$x+y+z$~~ - ?

$$\min \left(\frac{y}{x+y+z} \right) - ? ; \max \left(\frac{y}{x+y+z} \right) - ?$$

II) Из условия составим систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y=z \\ S_y \cdot y = \frac{1}{4} S_x \cdot x \quad (2) \\ S_y \cdot y + S_x \cdot x = S_z \cdot z \quad (3) \\ S_x - S_y \in [16000; 20000] \quad (4) \\ S_z \in [42000; 60000] \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Из (2) и (3):} \\ S_x \cdot x = 4 S_y \cdot y \Rightarrow \\ \Rightarrow 5 S_y \cdot y = S_z \cdot z \Rightarrow \frac{y}{z} = \frac{S_z}{5 S_y} \end{array} \right.$$

III) $\frac{y}{x+y+z} = \frac{y}{2z} \quad (z = x+y)$

Из II получаем: $\frac{y}{2z} = \frac{S_z}{10 S_y} = \frac{1}{10} \cdot \frac{S_z}{S_x - c}$

где $c \in [16000; 20000]$

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания

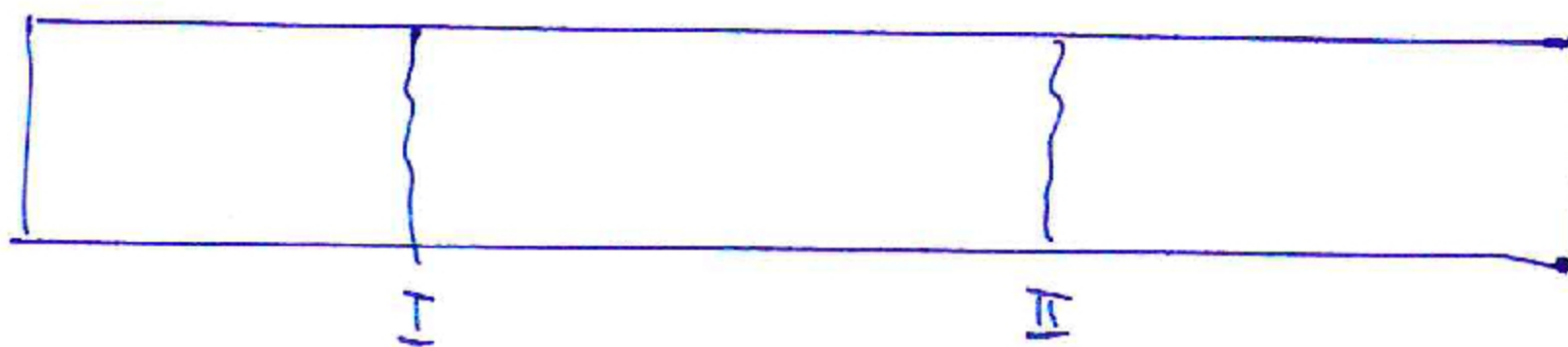
Санкт-Петербургский Государственный
электротехнический Университет "ЛЭТИ"

Шифр 97979 Класс 11

Вариант 21 Дата 19.02.2022

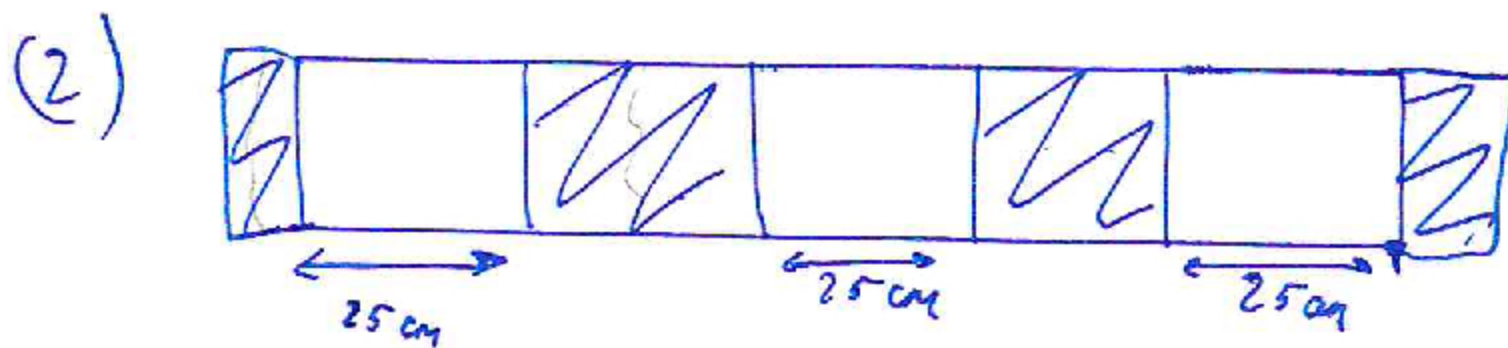


Задача 4:



Вопрос

(1) Условие задачи можно интерпретировать так:
Какова вероятность того, что 3 полученные части
трубы будут иметь длину, больше 25 см.



- Выделим 3 участка трубы по 25 см, тогда длина оставшейся части будет равна $100 - 3 \cdot 25 = 25$ см.
 - Заметим, что вероятность попадания первого дефекта в оставшуюся часть равна $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.
 - В какую бы зону ~~не попал~~ оставшейся части не попал дефект номер 2, мы ~~есть~~ ^{всегда} сможем выделить 3 куска по 25 см. (Не ~~зависит~~ ^{зависит} в какую зону попал первый дефект). Вероятность этого события как и в первом случае: $\frac{1}{4}$.
 - События связаны; зн. суммарная вероятность равна $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
- Ответ: $\frac{1}{16}$

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика



Площадка написания

Санкт-Петербургский Государственный электротехнический Университет "ЛЭТИ"

Шифр 97979 Класс 11

Вариант 21 Дата 19.02.2022

Заполняется проверяющим строго по образцу

Образец заполнения:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	7	1	5	5	5	3	0		

Оценка цифрами

Оценка прописью

Подпись

6	7	шестьдесят семь				Вит			
---	---	-----------------	--	--	--	-----	--	--	--

Задача 1:

$$x^9 - 2022x^3 + \sqrt{2021} = 0 \quad (*)$$

Пусть $x^3 = t$, тогда $(*)$ пр. вид:

$$t^3 - 2022t + \sqrt{2021} = 0 \quad (**) \quad t^3 - 2021t - t + \sqrt{2021} = 0 \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow t(t - \sqrt{2021})(t + \sqrt{2021}) - (t - \sqrt{2021}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t - \sqrt{2021})(t^2 + \sqrt{2021}t - 1) = 0 \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2021} \\ t = \frac{-\sqrt{2021} - 45}{2} \\ t = \frac{-\sqrt{2021} + 45}{2} \end{cases}$$

Т.о. $(*) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^3 = \sqrt{2021} \\ x^3 = \frac{-\sqrt{2021} + 45}{2} \\ x^3 = \frac{-\sqrt{2021} - 45}{2} \end{cases} \quad (**)$$

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{\sqrt{2021}} \\ x = \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2021} + 45}{2}} \\ x = \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2021} - 45}{2}} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ -\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2021} + 45}{2}}, \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2021} + 45}{2}}, \sqrt[3]{\sqrt{2021}} \right\}$

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.



Математика

Площадка написания

Санкт-Петербургский Государственный
электротехнический Университет "ЛЭТИ"

Шифр 97979 Класс 11

Вариант 21 Дата 19.02.2022

Задача 2:

$$f(x) + \left(\frac{1}{2} + x\right) \cdot f(1-x) = 1$$

Подставим $1-x$: $f(1-x) + \left(\frac{3}{2} - x\right) \cdot f(x) = 1 \quad (*)$

$$(*) \quad f(1-x) = 1 - f(x) \cdot \frac{\left(\frac{3}{2} - x\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

Полученное выражение для $f(1-x)$ подставим в исходное равенство:

$$f(x) + \left(\frac{1}{2} + x\right) \left(1 - f(x) \cdot \frac{\left(\frac{3}{2} - x\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)}\right) = 1 \quad (**)$$

$$(*) \quad f(x) + x + \frac{1}{2} - f(x) \cdot \left(\frac{3}{2} - x\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) = 1 \quad (**)$$

$$(*) \quad f(x) \left(1 + \left(x - \frac{3}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} - x \quad (**)$$

$$(*) \quad f(x) \left(1 + x^2 - x - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} - x \quad (**) \quad f(x) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - x \quad (**)$$

$$(*) \quad f(x) = \frac{-1}{x - \frac{1}{2}} \quad (**) \quad f(x) = \frac{-2}{2x - 1} \quad (**) \quad f(x) = \frac{2}{1 - 2x}$$

Ответ: $f(x) = \frac{2}{1 - 2x}$

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания

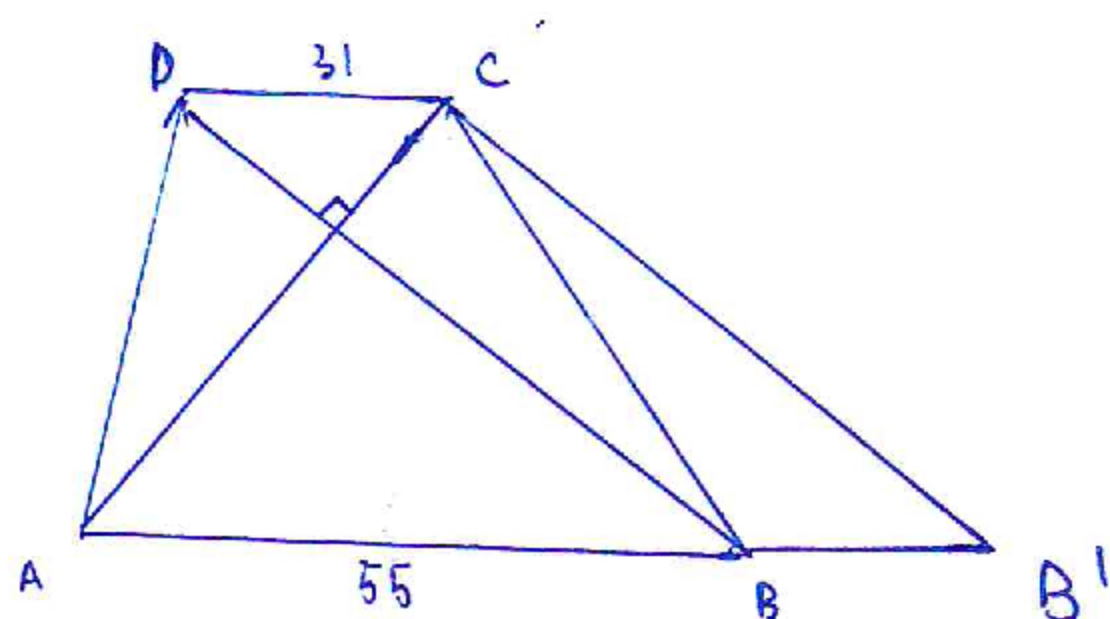
Санкт-Петербургский Государственный
электротехнический Университет "ЛЭТИ"

Шифр 97979 Класс 11

Вариант 21 Дата 19.02.2022



Задача 3:



$$\begin{aligned}
 (1) \quad \vec{AD} \cdot \vec{BC} &= (\vec{AC} + \vec{CD})(\vec{BD} + \vec{DC}) = \underbrace{\vec{AC} \cdot \vec{BD}}_{0 \text{ (} \cos(\vec{AC}; \vec{BD}) = 0)} + \vec{AC} \cdot \vec{DC} + \vec{CD} \cdot \vec{BD} + \vec{CD} \cdot \vec{DC} = \\
 &= \vec{AC} \cdot \vec{DC} - \vec{BD} \cdot \vec{DC} - (\vec{DC})^2 = \\
 &= \vec{DC}(\vec{AC} - \vec{BD}) - (\vec{DC})^2 = \vec{DC} \cdot (\vec{AC} + \vec{BB'}) - (\vec{DC})^2 \quad (\star)
 \end{aligned}$$

$$(2) \text{ Д.н.: } CB' \parallel BD; B' \in (AB).$$

$$\begin{array}{l|l}
 \text{Т.о. } CD \parallel BB' \text{ (трапеция)} & B'BDC - \text{пар-м, зн.} \\
 CB' \parallel BD \text{ (по постро.)} & \vec{DB} = \vec{CB'}; \vec{DC} = \vec{BB'}
 \end{array}$$

$$(3) (\star) = \vec{DC} \cdot (\vec{AC} + \vec{BB'}) - (\vec{DC})^2 = \vec{DC} \cdot \vec{AB'} - (\vec{DC})^2 =$$

$$AB' = AB + BB' = AB + DC = 55 + 31 = 86$$

$$(\star) = 31 \cdot 86 - (31)^2 = 31 \cdot 55 = 1705$$

Ответ: 1705

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.



Математика

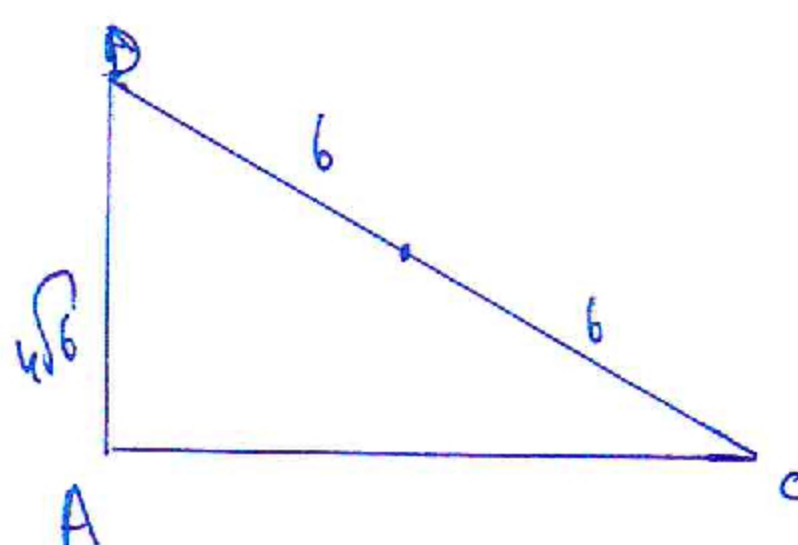
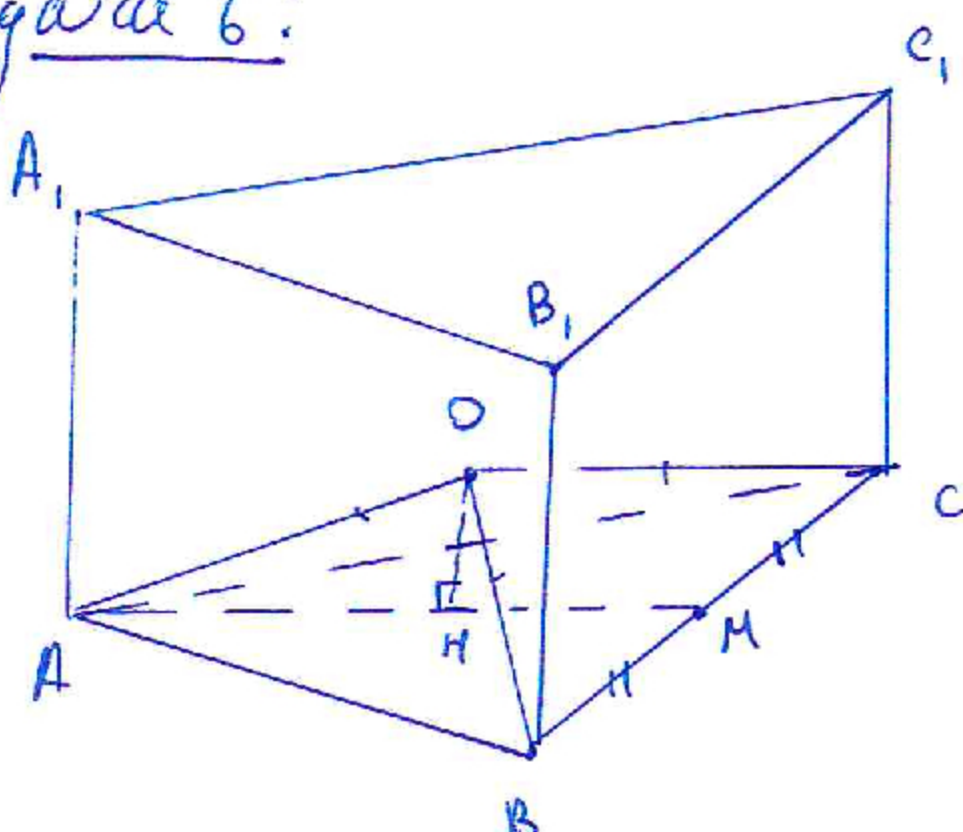
Площадка написания

Шифр 97979 Класс 11

Санкт-Петербургский Государственный электротехнический Университет "ЛЭТИ"

Вариант 21 Дата 19.02.2022

Задача 6:



- 1) CD - диаметр, тогда $\angle DAC = 90^\circ$ (как опир на диаметр).
 Тогда $\triangle DCA$ - пр/у: По т. Пифагора: опис. окр.

$$AC^2 = CD^2 - AD^2; \quad AC = \sqrt{12^2 - 16 \cdot 6} = \sqrt{144 - 96} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

- 2) В силу симметрии высота OH правильной призм-ды OABC падает на точку пересек. медиан (высот, бисс-с) р/ст. $\triangle ABC$. По теореме, о точке пересек. медиан:

$$AH = \frac{2}{3} \cdot AM \quad (AM - \text{медиана по постро.})$$

$$AM = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 6 \quad (\text{высота в пр. } \triangle).$$

Т.о.: $AH = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$

- 3) $\triangle AHO$: пр/у: По т. Пифагора: $OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

- 4) В силу симметрии $OH = \frac{1}{2} h$, где h - высота призм.

Т.о. $h = 2OH = 4\sqrt{5}$.

5) $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AC^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (4\sqrt{3})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 16 \cdot 3 = 12\sqrt{3}$ (ед. пл.)

6) $V_{\text{призмы}} = h \cdot S_{\triangle ABC} = 4\sqrt{5} \cdot 12\sqrt{3} = 48\sqrt{15}$ (ед. объема)

Ответ: $48\sqrt{15}$ ед. объема.