ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 96685 Класс 11

Вариант 21 Дата 19.02.2022

Заполняется проверяющим строго по образцу

Образец заполнения: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	5	1	5	0	0	3	0		

Оценка цифрами: 55 Оценка прописью: пятьдесят пять Подпись:

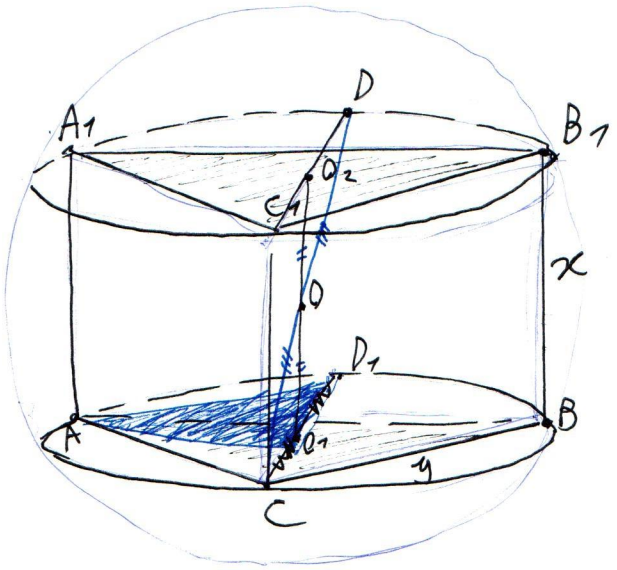
Задание 6.

Дано:
сфера, внутри которой правильная призма $ABCA_1B_1C_1$
основание ABC
CD - диаметр
$AD = 4\sqrt{6}$

Найти V призмы

Решение:

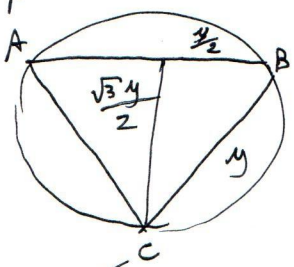
$V = S_{ABC} \cdot AA_1$ призмы



пусть сторона основания призмы $AB = AC = BC = y$, а боковая $AA_1 = BB_1 = CC_1 = x$

R описан.

$\triangle ABC$ правильный



$\frac{x}{3} \cdot \frac{y\sqrt{3}}{2} = \frac{y\sqrt{3}}{3}$

O_1 - центр $\triangle ABC$

O - центр сферы

тогда из $\triangle OO_1C$

$$6^2 = \left(\frac{y\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Пусть т. O_2 - центр $\triangle A_1B_1C_1$, тогда $\triangle OO_2D = \triangle OO_1C$

$\angle O_2OD = \angle O_1OC$ (вертикальные)

$OC = OD = R$

точка D_1 - проекция точки D на (ABC)

$CO_1 = O_1D_1 = R$

(в плоскости ABC)

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 96685 Класс 11

Вариант 21 Дата 19.02.2022

Задание 2.

$f(x) + (0,5+x)\cdot f(1-x) = 1$ Найти все функции $f(x)$

$f(1-x) + (0,5+x)\cdot f(1-(1-x)) = 1$

$f(1-x) + (0,5+x)\cdot f(1-1+x) = 1$

$f(1-x) + (0,5+x)\cdot f(x) = 1$

$f(x) + (0,5+x)\left(1 - (0,5+x)\cdot f(x)\right) = 1$

$f(x) + (0,5+x) - (0,5+x)^2 \cdot f(x) = 1$

$f(x)\cdot\left(1 - (0,5+x)^2\right) = 1 - (0,5+x)$

$f(x) = \dfrac{1-0,5-x}{1-(0,5+x)^2}$ $\quad x \neq 0,5$, $x \neq -1,5$

$1-(0,5+x)^2 \neq 0$

$1 - \frac{1}{4} - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} - x^2 \neq 0$

$\frac{3}{4} - x - x^2 \neq 0$

можно доопределить

$f(0,6)$, $f(-1,5)$

$f(0,5) + f(0,5) = 1$ +

5

то есть получается, что $f(0,5) = 1$

$f(-1,5) + (0,5-1,5)\cdot f(1+1,5) = 1$

$f(1,5) = 1 + f(2,5) = 1 + \dfrac{0,5+2,5}{1-(0,5+2,5)^2} = 1 + \dfrac{3}{1-9} = 1 - \dfrac{3}{8} =$

$= \dfrac{5}{8}$

$\triangle AO_1D_1$ – равносторонний (поскольку $AO_1 = O_1D_1 = r$, $\angle AO_1D_1 = 60^\circ$)

$AD_1 = AO_1 = \frac{y\sqrt{3}}{3}$

Из $\triangle ADD_1$ – по т. Пифагора

$AD^2 = AD_1^2 + DD_1^2$ $\quad DD_1 = AA_1 = x$

$(4\sqrt{6})^2 = \left(\frac{y\sqrt{3}}{3}\right)^2 + x^2$ } получается система

$\left(\frac{y\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 36$

$\frac{(y\sqrt{3})^2}{9} + x^2 = 96$

$x^2 - \frac{x^2}{4} = 60$

$\frac{3x^2}{4} = 60$

$x^2 = \frac{60 \cdot 4}{3}$

$x^2 = 80$

$x = \pm\sqrt{80}$

$x = \sqrt{80}$ (знач. сторона)

$\frac{(y\sqrt{3})^2}{9} = 96 - x^2$

$\frac{(y\sqrt{3})^2}{9} = 96 - 80$

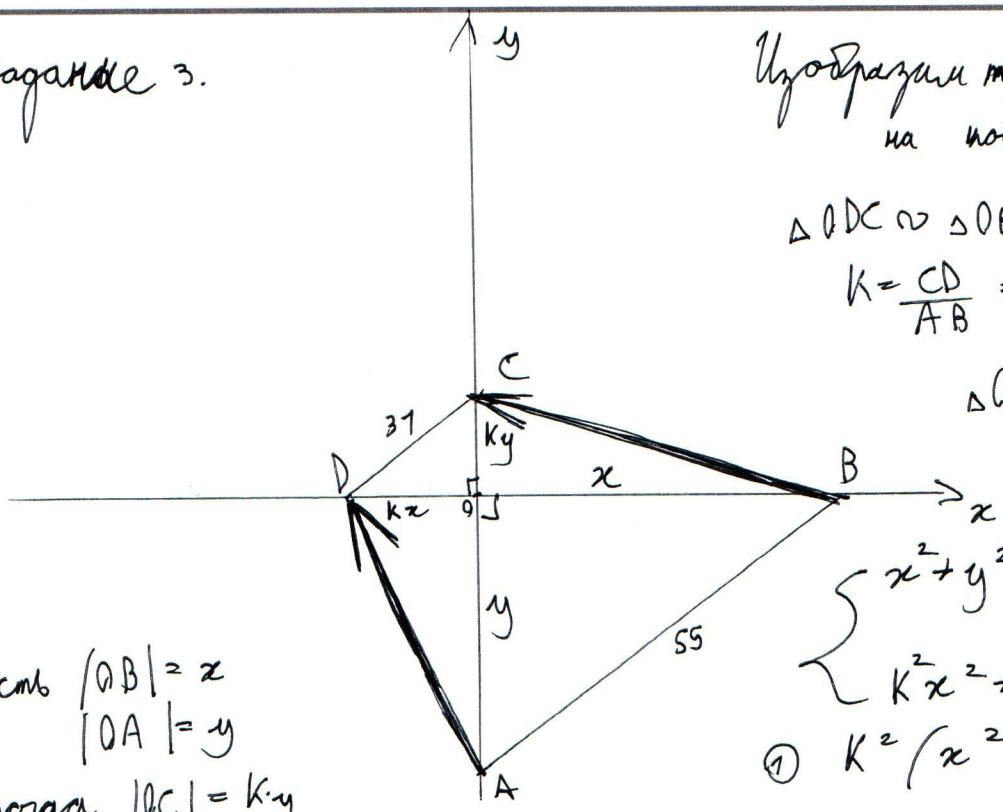
$\frac{(y\sqrt{3})^2}{9} = 16$

$y^2 = \frac{16 \cdot 9}{3}$

$y^2 = 48$

$y = \sqrt{48}$

Задание 3.



Изобразим трапецию на координатной плоскости

$\triangle ODC \sim \triangle OBA$

$K = \frac{CD}{AB} = \frac{31}{55}$

$\triangle ODC$ и $\triangle OBA$ - прямоугольные по т. Пифагора

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 55^2 \\ K^2x^2 + K^2 \cdot y^2 = 31^2 \ (1) \end{cases}$$

(1) $K^2(x^2 + y^2) = 31^2$

пусть $|OB| = x$
$|OA| = y$

тогда $|BC| = K \cdot y$
$|OD| = K \cdot x$

Координаты точек $A(0; -y)$

$B(x; 0)$

~~$C\left(\frac{-31x}{55}; 0\right)$~~

~~$D\left(0; \frac{31}{55}y\right)$~~

$D(-Kx; 0)$

$C(0; Ky)$

$\overrightarrow{AD} = \left(0; \frac{31y}{55} - (-y)\right) = \left(0; \frac{31y + 55y}{55}\right) = \left(0; \frac{86}{55}y\right)$

$\overrightarrow{BC} = \left(\frac{-31x}{55} - x; 0\right) = -$

$\overrightarrow{AD}(-Kx; y)$

$\overrightarrow{BC}(-x; Ky)$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = Kx^2 + Ky^2 = K(x^2 + y^2) = \frac{31 \cdot 55 \cdot 55}{55} = 1705$

15

$55 \times 31 = 55 + 1650 = 1705$

Ответ: 1705

Задание 5.

Пусть

	I нефть	II нефть	III нефть
кол-во акций	a	b	c
цена за акцию	A	B	C
стоимость пакета	$a \cdot A$	$b \cdot B$	$c \cdot C$

$$\frac{aA}{4} = b \cdot B$$

$$aA + b \cdot B = cC$$

0

$$16 < A - B < 20$$