ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25018

Класс 10 Вариант 41 Дата Олимпиады 10.02.18

Площадка написания СОШ №1, г. Надым

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	4	3	8	8	12	12	6	16	16	89	восемьдесят девять	[illegible]

1. $a = 1-\sqrt{2}$; $b = 1+\sqrt{2}$

$$A = \frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}} : \frac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab} \cdot \left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1}$$

1) $\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}} = \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}} = \frac{\frac{b-a}{ab}}{\frac{b^3+a^3}{a^3b^3}} = \frac{(b-a)\cdot a^2b^2}{a^3+b^3} = \frac{(b-a)\cdot a^2b^2}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}$

2) $\frac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab} = \frac{a^2b^2}{a^2+2ab+b^2-3ab} = \frac{a^2b^2}{a^2-ab+b^2}$

3) $\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1} = \frac{ab}{a^2-b^2}$

4) $A = \frac{(b-a)\cdot \cancel{a^2b^2}}{(a+b)\cancel{(a^2-ab+b^2)}} : \frac{\cancel{(a^2-ab+b^2)}}{\cancel{a^2b^2}} \cdot \frac{ab}{a^2-b^2}$

$A = \frac{(b-a)\cdot ab}{(a+b)\cdot(a-b)(a+b)} \Rightarrow A = \frac{-\cancel{(a-b)}\cdot ab}{(a+b)^2\cdot\cancel{(a-b)}}$

$A = \frac{-ab}{(a+b)^2} \Rightarrow A = \frac{-ab}{a^2+2ab+b^2}$

$A = \frac{-(1-\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})^2+2(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})^2}$

$A = \frac{-1+2}{1-\cancel{2\sqrt{2}}+2+2\cdot(1-2)+1+\cancel{2\sqrt{2}}+2}$ $A = \frac{1}{4}$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

2. $\sqrt[3]{(5+x)^2} + 4\sqrt[3]{(5-x)^2} = 5\sqrt[3]{25-x^2}$

$\left(\sqrt[3]{5+x}\right)^2 + 4\left(\sqrt[3]{5-x}\right)^2 = 5\sqrt[3]{(5-x)(5+x)}$

пусть $\begin{cases}\sqrt[3]{5+x} = a,\\ \sqrt[3]{5-x} = b,\end{cases}$ тогда

$a^2 + 4b^2 = 5ab$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25018

$a^2-5ab+4b^2=0$

$(a-4b)(a-b)=0$

$a-4b=0$ или $a-b=0$

$a=4b$ $\quad$ $a=b$

Вернёмся к замене:

1) $\sqrt[3]{5+x}=4b$

$\sqrt[3]{5-x}=b$

$\dfrac{\sqrt[3]{5+x}}{\sqrt[3]{5-x}}=\dfrac{4b}{b}$

$\left(\sqrt[3]{\dfrac{5+x}{5-x}}\right)^3=4^3$

$\dfrac{5+x}{5-x}=64$

$\dfrac{5+x}{5-x}-64=0$

$\dfrac{5+x-320+64x}{5-x}=0.$

$\dfrac{65x-315}{5-x}=0$

$65x-315=0$

$x=\dfrac{315}{65}$

$x=\dfrac{63}{13}.$

2) $\sqrt[3]{5+x}=b$

$\sqrt[3]{5-x}=b$

$\left(\sqrt[3]{\dfrac{5+x}{5-x}}\right)^3=(1)^3$

$\dfrac{5+x}{5-x}=1$

$5+x=5-x$

$2x=0$

$x=0$

Ответ: $0;\ \dfrac{63}{13}$.

5. Пусть a – масса (исход.) спирта, тогда после первого переливания останется $\frac{2}{3}a$ спирта, после второго – $\frac{4}{9}a$, значит

$\left(\frac{2}{3}\right)^k a$ – масса спирта после k переливаний.

$\left(\frac{2}{3}\right)^k \cancel{a}<0{,}1\cancel{a}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^k<0{,}1$

Пусть $k=5$.

$\frac{32}{243}<0{,}1$ – ложно, т.к. $\frac{32}{243}>0{,}1$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25018

Пусть $k=6$

$\frac{64}{819} < 0,1$ – истинно, значит $k_{наим.} = 6$.

Ответ: 6.

7. $\sqrt{4-4x^3+x^6} > x-\sqrt[3]{2}$

$\sqrt{(x^3-2)^2} > x-\sqrt[3]{2}$

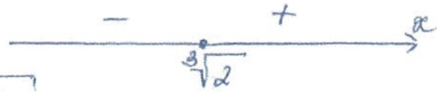
$|x^3-2| > x-\sqrt[3]{2}$

1) Если $x^3-2 \geq 0$, то

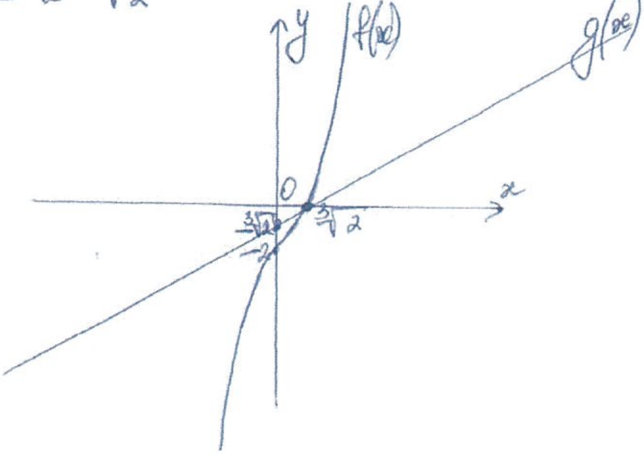
$x^3-2=0$

$x=\sqrt[3]{2}$

$x^3-2 > x-\sqrt[3]{2}$



Пусть $f(x)=x^3+2$, а $g(x)=x-\sqrt[3]{2}$



• $f(x)$ – куб. парабола, смещённая на 2 ~~вверх~~ вниз по оси OY

• $g(x)$ – прямая.

$f(x) > g(x)$ при $x>\sqrt[3]{2}$ → ответ

2) Если $x^3-2<0$, то

$-x^3+2 > x-\sqrt[3]{2}$

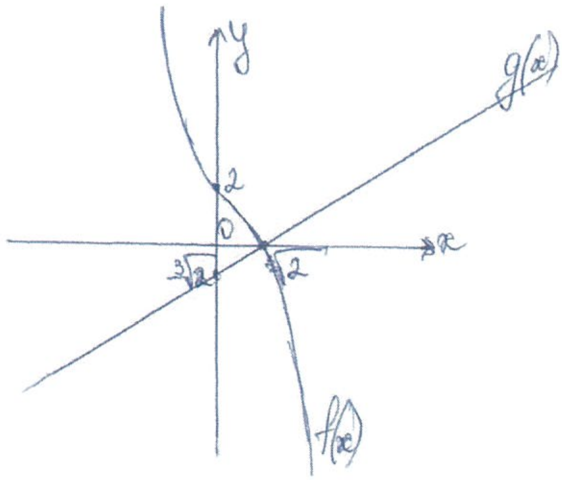
$f(x)=-x^3+2$ – куб. парабола, смещ. вверх на 2 по оси OY и симметрично отраж. относит. оси Ox.

$g(x)=x-\sqrt[3]{2}$

$f(x)>g(x)$ при $x<\sqrt[3]{2}$ → ответ.

т.о. $x>\sqrt[3]{2}$ и $x<\sqrt[3]{2}$.

Ответ: $x<\sqrt[3]{2}$; $x>\sqrt[3]{2}$.



9. $9^x + (b^2+6)\cdot 3^x - b^2+16=0$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25018.

$3^{2x}+(b^2+6)3^x-b^2+16=0.$

10. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$,

$(1+3+5\ldots+(2n+1)):\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{342}\right)=342$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{342}=\frac{n+1}{n+2}$, где $(n+1)(n+2)=342$

$342=18\cdot19$, значит $n=17$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{342}=\frac{17+1}{17+2}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{342}=\frac{18}{19}$.

$(1+3+5+7+\ldots+(2n+1)):\frac{18}{19}=342$

$1+3+5+\ldots+(2n+1)=\frac{342\cdot18}{19}$

$1+3+5+\ldots+(2n+1)=18^2$

$S_n=1+3+5+\ldots+(2n+1)$ – сумма арифметич. прогрессии

$a_1=1$, $d=a_2-a_1 \Rightarrow d=2$

$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ $\qquad S_n=\frac{1+2n+1}{2}\cdot n$

$S_n=(1+n)\cdot n$

$(1+n)\cdot n=18^2$

$n+n^2-18^2=0.$

арифметич. прогрессия; $3,5,7\ldots,(2n+1)$; $S_n=3+5+7\ldots+(2n+1)$

$1+S_n=18^2$ $\qquad S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$

$S_n=\frac{3+2n+1}{2}\cdot n$

$1+(2+n)n=18^2$ $\qquad S_n=(2+n)\cdot n$

$n^2+2n+1-324=0.$

$n^2+2n-323=0$

$D=1+323=18^2$

$n_1=\frac{-1+18}{1}=17$ $\qquad n_2=\frac{-1-18}{1}$ – не подходит, т.к. $n\in\mathbb{N}$

Ответ: 17.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25018.

9. $9^x + (b^2+6)\cdot 3^x - b^2 + 16 = 0.$

$3^{2x} + (b^2+6)\cdot 3^x - b^2 + 16 = 0$

$3^x = t, \quad t > 0$, т.к. $3^x > 0$.

1) $t^2 + (b^2+6)\cdot t - b^2 + 16 = 0$ - нет корней, если:

1) $D < 0$

$D = (b^2+6)^2 + 4b^2 - 16\cdot 4$

$D = b^4 + 16b^2 - 28$

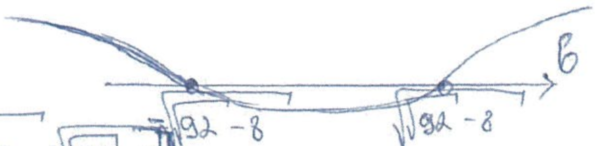
$D = (b^2+8)^2 - 92$

$((b^2+8)^2 - 92) < 0$

$(b^2 + 8 - \sqrt{92})(b^2 + 8 + \sqrt{92}) < 0$

$b^2 = \sqrt{92} - 8$

$b = \pm\sqrt{\sqrt{92} - 8}$



$b = \pm\sqrt{\sqrt{92} - 8}$

$t_1^2 = t_2 : t_{1,2} = \dfrac{-b^2-6}{2} = -0{,}5b^2 - 3$ - отриц.,

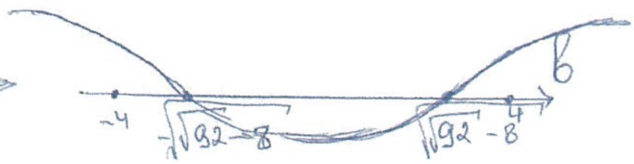
значит $b = \pm\sqrt{\sqrt{92}-8}$ - подходит.

значит, $b \in [-\sqrt{\sqrt{92}-8}; \sqrt{\sqrt{92}-8}]$

2) $D \geq 0$, но t_1 и t_2 - отрицательные или равны 0.

$$\begin{cases} ((b^2+8)^2 - 92) \geq 0 \\ x_в < 0 \\ f(0) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((b^2+8)^2 - 92) \geq 0 \\ -\dfrac{b^2+6}{2} < 0 \\ -b^2 + 16 > 0 \end{cases} \rightarrow$$



$b = \pm 4.$

$t^2 + 22t = 0$

$t = 0$ или $t = -22$, значит $b = \pm 4$ - подходит.

• $-\dfrac{b^2+6}{2} < 0$

$-b^2 - 6 < 0$

$b^2 > 6$ - $b \in R$.

$-b^2 + 16 > 0$

$b^2 < 16$

$-4 < b < 4$ т.о. при $b \in [-4; 4]$ ур-ние $9^x + (b^2+6)3^x - b^2 + 16 = 0$ - не имеет решений.

Ответ: $[-4; 4]$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25018

3. $\frac{tg t}{\cos^2 5t} - \frac{tg 5t}{\cos^2 t} = 0$

ОДЗ!

$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha$

$tg t(1+tg^2 5t) - tg 5t(1+tg^2 t) = 0$

$tg t = a,\ tg 5t = b$

$a(1+b^2) - b(1+a^2) = 0.$

$a + ab^2 - b - a^2 b = 0.$

$(ab-1)(b-a) = 0.$

$b - a = 0$ или $ab - 1 = 0.$

$tg 5t - tg t = 0.$

$\frac{\sin 4t}{\cos t \cdot \cos 5t} = 0$

$\begin{cases} \sin 4t = 0 \\ \cos t \neq 0 \\ \cos 5t \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} t = \frac{\pi}{4}n, n \in Z \text{ - ответ} \\ t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z. \\ t \neq \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}n, n \in Z. \end{cases}$

$tg t \cdot tg 5t = 1$

$tg 5t \cdot ctg 5t = 1, \neq 0$

$tg t \cdot tg 5t - tg 5t \cdot ctg 5t = 0.$

$tg 5t(tg t - ctg 5t) = 0$

$tg 5t = 0$ или $tg t - ctg 5t = 0$

$5t = \pi n, n \in Z$

$t = \frac{\pi}{5}n, n \in Z.$

$\frac{\cos(t+5t)}{\cos t \cdot \sin 5t} = 0$

$\begin{cases} \cos 6t = 0 \\ \cos t \neq 0 \\ \sin 5t \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 6t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ 5t \neq \pi n, n \in Z. \end{cases}$

$\begin{cases} t = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}n, n \in Z \text{ - ответ.} \\ t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ t \neq \frac{\pi}{5}n, n \in Z. \end{cases}$

Ответ: $\frac{\pi}{4}n, n \in Z$; $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}n, n \in Z.$

+

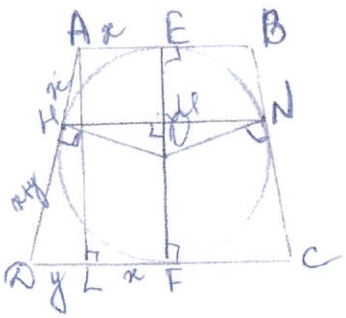
+

6

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25018

8.



Дано: ABCD – равнобедр. трапеция, окр. $(O; r)$, $r = 5$ см, AD, BC – бок. стороны, AD ∩ окр. = H, BC ∩ окр. = N, NH = 8 см;

Найти: S_{ABCD}.

Решение

1). $S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot h$, где h – высота.

Проведём высоту EF через точку O и высоту AL.

Проведём высоту EF через точку O и пересеч. ∩ EF и NH.

• Рассм. △ OHM, где M – точка пересеч. ∩ EF и NH.

AB ∥ NH, то ∠OMH = 90°

$OH = r = 5$ см | $OM = 3$, т.к. OMH – египетский треугольник.

$MH = \frac{1}{2} NH = 4$ см

$ME = OE - OM = r - OM = 2$ см.

~~Проведём отрезок $OH_1 \parallel AE$.~~

$\frac{MH}{DF} = \frac{EM}{EF}$, $EF = 2r = 10$ см

Пусть $AE = x$, а $DL = y$, тогда $FD = x+y$

$\frac{4}{x+y} = \frac{2}{10} \Rightarrow x+y = 20$ см, $x = 20 - y$

• Рассм. △ DAL – прямоуг.

$AD^2 = DL^2 + AL^2$

$(x + x+y)^2 = y^2 + 10^2$

$(x + 20)^2 = y^2 + 100$

$(20 - y + 20)^2 = y^2 + 100$

$(40 - y)^2 = y^2 + 100$

$1600 - 80y + \cancel{y^2} = \cancel{y^2} + 100$

$y = \frac{1500}{80} \Rightarrow y = 18{,}75$ см.

$x = 20 - 18{,}75 = 1{,}25$ см.

• $S_{ABCD} = 2 S_{AEFD} = 2 \cdot \frac{x + x+y}{2} \cdot 10$

$S_{ABCD} = (20 + 1{,}25 \text{ см}) \cdot 10$

$S_{ABCD} = 212{,}5 \text{ см}^2$

Ответ: $212{,}5 \text{ см}^2$.

∓

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25018

6. $\alpha, \beta, \gamma \in$ I четверти, т.е. $0 < \alpha < 90$, $0 < \beta < 90$, $0 < \gamma < 90$

$\gamma = \beta + \frac{\pi}{12} = \alpha + \frac{\pi}{6}$; α, β, γ - арифмет. прогрессия

$tg\gamma, tg\beta, tg\alpha$ - геометр. прогрессия, тогда

$tg^2\beta = tg\alpha \cdot tg\gamma \Rightarrow tg^2(\alpha + \frac{\pi}{12}) = tg\alpha \cdot tg(\alpha + \frac{\pi}{6})$

$$\frac{1-\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6})}{1+\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6})} = \frac{\sin\alpha \cdot \sin(\alpha+\frac{\pi}{6})}{\cos\alpha \cdot \cos(\alpha+\frac{\pi}{6})}$$

$$\frac{1-\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6})}{1+\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6})} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot(\cos\frac{\pi}{6} - \cos(2\alpha+\frac{\pi}{6}))}{\cancel{\frac{1}{2}}(\cos\frac{\pi}{6} + \cos(2\alpha+\frac{\pi}{6}))}, \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(1-\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6}))(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos(2\alpha+\frac{\pi}{6})) = (1+\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6}))(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos(2\alpha+\frac{\pi}{6}))$$

$$\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6}) + \cos(2\alpha+\frac{\pi}{6}) - \cancel{\cos^2(2\alpha+\frac{\pi}{6})} = \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6}) - \cos(2\alpha+\frac{\pi}{6}) - \cancel{\cos^2(2\alpha+\frac{\pi}{6})}$$

$$-\sqrt{3}\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6}) + 2\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6}) = 0.$$

$$\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6}) = 0$$

$2\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$, но $n=1$,

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

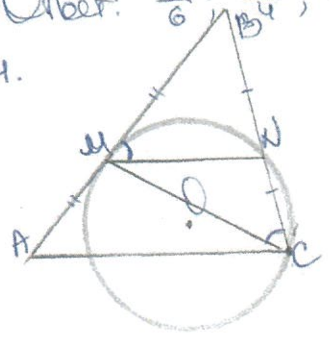
$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\beta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$.

4.



Дано: $\triangle ABC$, MN - средняя линия $\triangle ABC$, $M \in AB$, $N \in BC$, Окр. $(O; r)$, $r = \sqrt{2}$; $M, N, C \in$ окр. $(O; r)$, AB - касат. к окр. $(O; r)$, $AC = 2$.

Найти: $\sin\angle ACB$.

Решение.

1) MN - сред. линия, то $AM = MB$ и $BN = NC$; $MN \parallel AC$

$\triangle ABC \sim \triangle MBN$ (по трём пропорц. сторонам:

$BN = \frac{1}{2}BC$

$MB = \frac{1}{2}AB$

$MN = \frac{1}{2}AC$.), то $\angle BNM = \angle BCA$, $\angle BAC = \angle BMN$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 25018

2) по теореме о касат. и секущей: $MB^2 = BN \cdot BC$

$MB^2 = BN \cdot 2BN$

$MB = \sqrt{BN^2 \cdot 2} \rightarrow MB = BN \cdot \sqrt{2}$

3) по теореме об угле между касат. и хордой:

$\angle BMN = \frac{1}{2} \smile MN$

$\angle MCN = \frac{1}{2} \smile MN$ (как вписанный угол, опир. на эту дугу)

т.о. $\angle BMN = \angle MCN$.

4) по теореме синусов (для $\triangle MNC$):

$\frac{MN}{\sin\angle MCN} = 2r$,

$\sin\angle MCN = \frac{MN}{2r} \rightarrow \sin\angle MCN = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

5) по теореме синусов (для $\triangle MNB$):

$\frac{BN}{\sin\angle BMN} = \frac{MB}{\sin\angle BNM}$

$\sin\angle BNM = \frac{MB \cdot \sin\angle BMN}{BN}$,

$\angle BMN = \angle MCN$, то $\sin\angle BMN = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\sin\angle MNB = \frac{\cancel{BN \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\cancel{\sqrt{2}}}}{\cancel{BN}}$

$\sin\angle BNM = \frac{1}{2}$

6) $\angle BNM = \angle ACB$, то $\sin\angle ACB = \sin\angle BNM = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.