ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 28271

Класс 11 Вариант 42 Дата Олимпиады 10.02.18

Площадка написания МОУ СОШ №1 г. Надым

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	4	3	8	8	10	12	16	16	16	97	девяносто семь	[illegible]

№7 $\sqrt{x^4-2x^2+1} > 1-x;$

ОДЗ: $x \in R$.

$\sqrt{(x^2-1)^2} > 1-x$.

1) $1-x<0$

$1<x$.

2) $|x^2-1|>1-x$.

$x^2-1>1-x$ или $-x^2+1>1-x$.

$\cancel{2x>2}$.

$x^2+x-2>0$

$D=9$.

$x_{1,2}=\frac{-1\pm3}{2}$

$x\neq1;$

$x\neq-2$.

$+\quad -2 \quad - \quad 1 \quad +$

$(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$

$-x^2+x>0$.

$-x(x-1)>0$.

$x\neq0$

$x\neq1$.

$-\quad 0 \quad + \quad 1 \quad -$

$(0;1)$.

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;\infty)$. +

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 28271

№9 $4^x+(a^2+5)\cdot 2^x-a^2+9=0$.

$(2^x)^2+(a^2+5)2^x=-9+a^2$.

Заметим, что с ~~пра~~ левой сторона всегда будет положительно т.к $(2^x)^2>0$, $2^x>0$, $a^2+5>0$.

Тогда, уравнение не будет иметь решений при

$a^2-9<0$.

$a^2<9$.

$-3<a<3$

Ответ: $(-3;3)$.

№2 $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)+48\left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right)=0$

Пусть: $\frac{x-2}{x+1}=a$; $\frac{x+2}{x-1}=b$ =>

$\Rightarrow 20a^2-5b^2+48ab=0$; $(10a-b)(2a+5b)=0$.

1) $b=10a$

$\frac{x+2}{x-1}=\frac{10(x-2)}{x+1}$;

$x^2+3x+2=10x^2-30x+20$;

$9x^2-33x+18=0$

$3x^2-11x+6=0$

$D=49$

$x=\frac{11\pm7}{6}=3;\ \frac{2}{3}$.

2) $b=-0{,}4a$

$\frac{x+2}{x-1}=-0{,}4\frac{x-2}{x+1}$

$D<0$.

Ответ $\left[\begin{array}{l}x=3;\\ x=\frac{2}{3}\end{array}\right.$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 28271

№8 Дано:

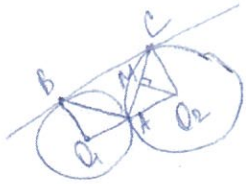
$(O_1; r)$

$(O_2; R)$

касаются в A

a – касательная, AB = 6 см

B и C – точки касания, AC = 8 см.



R – ?

r – ?

Решение: Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей, B и C – указанные точки касания, AB = 6, AC = 8. Т.к. $\triangle ABC$ – прямоугольный, то BC = 10 см ($6^2+8^2=10^2$). Пусть M – основание перпендикуляра опущенного из O_2 на AC. Из подобия $\triangle O_2MC$ и $\triangle CAB \Rightarrow$

$\Rightarrow O_2C = BC \cdot \frac{CM}{AB} = 10 \cdot \frac{4}{6} = \frac{20}{3}$; Точно так же $O_1B = \frac{15}{4}$.

Ответ: $\frac{15}{4}$; $\frac{20}{3}$.

+

~~№6~~ №3 $\frac{\cos^2 3t}{\operatorname{tg} t} + \frac{\cos^2 t}{\operatorname{tg} 3t} = 0$.

ОДЗ: ?

$\cos^2 3t \operatorname{tg} 3t = -\cos^2 t \operatorname{tg} t$.

$\cos 3t \sin 3t = -\cos t \sin t$

$t \neq 0$. $t = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ почему? решение?

$t = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$\pm$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ t = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k. \end{array}\right.$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 28271

№1

$$A=\left(\frac{x+2y}{8y^3(x^2+2xy+2y^2)}-\frac{(x-2y):8y^3}{x^2-2xy+2y^2}\right)+\left(\frac{y^{-2}}{4x^2-8y^2}-\frac{1}{y^2 4x^2+8y^4}\right)=$$

$$=\left(\frac{x+2y}{8y^3(x^2+2xy+2y^2)}-\frac{x-2y}{8y^3(x^2+2y^2-2xy)}\right)+\left(\frac{1}{4y^2(x^2-2y^2)}-\frac{1}{4y^2(x^2+2y^2)}\right)=$$

$$=\frac{(x+2y)(x^2+2y^2-2xy)-(x-2y)(x^2+2y^2+2xy)}{8y^3(x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy)}+\frac{x^2+2y^2-x^2+2y^2}{4y^2(x^4-4y^4)}=$$

$$=\frac{\cancel{8y^3}}{\cancel{8y^3}(x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy)}+\frac{\cancel{4y^2}}{\cancel{4y^2}(x^4-4y^4)}=$$

$$=\frac{1}{(x^2-2y^2)^2-4x^2y^2}+\frac{1}{x^4-4y^4}=\frac{x^4-\cancel{4y^4}+x^4+\cancel{4y^4}}{(x^4+4y^4)(x^4-4y^4)}=$$

$$=\frac{2x^4}{x^8-16y^8}.$$ При $x=\sqrt[4]{6}$ и $y=\sqrt[8]{2}$

+

$$A=\frac{2\cdot(\sqrt[4]{6})^4}{(\sqrt[4]{6})^8-16(\sqrt[8]{2})^8}=\frac{2\cdot 6}{36-32}=\frac{12}{4}=\boxed{3}$$

Ответ: 3.

№6 $(1-\cos 2x)\left(\frac{1}{2}\sin^{-2}x\right)=\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2$; $\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{2\sin^2 x}=\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2$

$\frac{2\cancel{\cos^2 x}}{2\sin^2 x}=\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)=\pm 1$. $\cos x=-\frac{1}{2}$. $k-?$

$\pm$

$x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k$

$x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k; \\ x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k. \end{array}\right.$

4

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 28271

№5 Пусть за n раз отмыли больше 70 раз%.

$$20+20\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^1+20\left(\frac{4}{5}\right)^2+\ldots+20\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}>70.$$

n – искомое число раз.

$$20\cdot\frac{4}{5}+20\left(\frac{4}{5}\right)^2+\ldots+20\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}>50.$$

$$20\left(\frac{4}{5}\right)^2+20\left(\frac{4}{5}\right)^3+\ldots+20\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}>34$$

$$20\left(\frac{4}{5}\right)^3+20\left(\frac{4}{5}\right)^4+\ldots+20\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}>21{,}2$$

$$20\left(\frac{4}{5}\right)^4+20\left(\frac{4}{5}\right)^5+\ldots+20\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}>10{,}96$$

$$20\left(\frac{4}{5}\right)^5+20\left(\frac{4}{5}\right)^6+\ldots+20\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}>2{,}768$$

$20\left(\frac{4}{5}\right)^5>2{,}768$, таким образом $n-1=5$.

$n=6$.

Ответ: 6.

№10. $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$; решить: $\dfrac{1+27+125+\ldots+(2n-1)^3}{1+4+7+\ldots+(3n-2)}=35$.

$$\frac{n^2(2n^2-1)}{\frac{1+3n-2}{2}\cdot n}=35;\quad \frac{2n^2(2n^2-1)}{(3n-1)n}=35;\quad 2n(2n^2-1)=35(3n-1).$$

$4n^2-2n=105n-1$;

$4n^2-107n+1=0$.

Заметим, что n должно быть равно одному из делителей 35, т.е. 5, 7, 1, 35. Проверив, получим: $n=5$.

Ответ: 5.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 28271

№4 Дано:

ΔPQL

AB - ср. линия

$PL=\sqrt{2}$

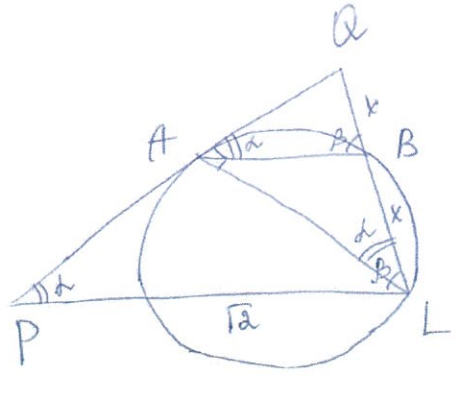
$\sin\angle PLQ=\frac{1}{3}$

$(O;R)\cap(A)$

$(O;R)\cap(B)$

$(O;R)\cap(L)$

$(O;R)$ касается PQ



R - ?

Решение: 1) $BQ=BL=x$; $\angle QPL=\alpha$; $\angle PLQ=\beta$; $\sin\beta=\frac{1}{3}$

2) По теореме о касательной: $AQ=\sqrt{QN\cdot QL}=\sqrt{x\cdot 2x}=x\sqrt{2}$.

3) По теореме о ср. линии треугольника: $AB=\frac{1}{2}PL=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

и $AB\parallel PL\Rightarrow\angle QAB=\angle QPL$ и $\angle QBA=\angle QLP=\beta$

4) По теореме об угле между касательной и хордой $\Rightarrow$

$\rightarrow\angle BLA=\angle QAB=\alpha$, Если R - радиус данной окружности, то $AB=2R\sin\angle BLA$;

$\frac{\sqrt{2}}{2}=2R\sin\alpha$; $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4R}$

5) По теореме синусов: $\frac{AQ}{\sin\angle QBA}=\frac{QB}{\sin\angle QAB}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{x\sqrt{2}}{\sin\beta}=\frac{x}{\sin\alpha}$; $\frac{\sqrt{2}}{1/3}=\frac{1}{\sqrt{2}/4R}$; $3\sqrt{2}=\frac{4R}{\sqrt{2}}$; $4R=6$.

$R=\frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$

6