

ШИФР

1075

Класс 11 Вариант 8 Дата Олимпиады 11.02.17

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	15	5	20	90	девяносто	

$$(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x - 2) = 5$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9 = 0$$

Если у данного уравнения есть рациональные корни, то они должны делителями свободного члена. По предположению: 1, -1, 3, -3.

Легко видеть, что -1 подходит.

$$(-1)^4 - 4(-1)^3 + 4(-1)^2 - 9 = 0$$

$D=0$ Поделим уравнение на $x - (-1) = x + 1$ и будем решать уже более простое.

$$x^3 - 5x^2 + 9x - 9 = 0$$

Понимая рассуждениями $x_2 = 3$

$$27 - 5 \cdot 9 + 9 \cdot 3 - 9 = 0$$

$$0 = 0$$

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

$D = 4 - 12 = -8 \Rightarrow$ корней больше нет

Ответ: -1, 3 ✓

№2

$$\sqrt{3x-3} - \sqrt{x-3} = 4$$

Возведем в квадрат.

$$3x - 3 - 2\sqrt{(3x-3)(x-3)} + x - 3 = 16$$

$$4x - 22 = 2\sqrt{3x^2 - 12x + 9}$$

$$2x - 11 = \sqrt{3x^2 - 12x + 9}$$

Возведем в квадрат

$$4x^2 - 44x + 121 = 3x^2 - 12x + 9$$

$$x^2 - 32x + 112 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 256 - 112 = 144$$

$$x_1 = 28$$

3 88
восемьдесят восемь

$$\begin{array}{r} x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 0x - 9 \\ - (x^4 + x^3) \\ \hline -5x^3 + 4x^2 - 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -5x^3 + 4x^2 - 9 \\ - (-3x^3 - 3x^2) \\ \hline -2x^3 + 9x^2 - 9 \\ - (-2x^3 + 6x^2) \\ \hline 3x^2 - 9 \\ - (3x^2 - 9) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 9x - 9 \\ - (x^3 - 3x^2) \\ \hline -2x^2 + 9x - 9 \\ - (-2x^2 + 6x) \\ \hline 3x - 9 \\ - (3x - 9) \\ \hline 0 \end{array}$$

ОДЗ: $3x-3 \geq 0$ и $x-3 \geq 0$

$x \geq 1$

$x \geq 3$

$x \geq 3$

Меня №1



$x_2 = 4$ - не удовлетворяет. Этот корень возник из-за возведения в квадрат

Ответ: 28 ✓

№3

$$\frac{-x^3 + 2x^2 + x - 1}{2 - x} < x^2$$



$$\frac{-x^3 + 2x^2 + x - 1 - 2x^2 + x^3}{2 - x} < 0$$

$$\frac{x-1}{2-x} < 0$$

выделим нули функции на числовую прямую

$$x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$$

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ ✓

№4

$$\lg(3x-1) - \frac{1}{2}\lg(x+1) = \frac{1}{2}\lg(x+13)$$

$$\text{ОДЗ: } 3x-1 > 0$$

$$x+1 > 0$$

$$x+13 > 0$$

$$x > \frac{1}{3}$$

$$x > -1$$

$$x > -13$$

$$\Downarrow \\ x > \frac{1}{3}$$

$$\lg(3x-1) - \lg(\sqrt{x+1}) - \lg(\sqrt{x+13}) = 0$$

$$\lg\left(\frac{3x-1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+13}}\right) = 0$$

$$\frac{3x-1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+13}} = 1$$

- с учётом ОДЗ можно домножить на знаменатель

$$3x-1 = \sqrt{x^2+14x+13}$$

Возведём в квадрат

$$9x^2 - 6x + 1 = x^2 + 14x + 13$$

$$8x^2 - 20x - 12 = 0$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$D = 25 + 24 = 49$$

$$x_1 = 3$$

$x_2 = -0.5$ - не проходит по ОДЗ

Ответ: 3 ✓

№5

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-8x+14}$$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+2} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-8x+14}$ - т.к. $\frac{1}{3} < 1$, то при переносе к показателю знак неравенства повернется

$$2x+2 < 2x^2-8x+14$$

$$2x^2 - 10x + 12 > 0$$

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

лист №2

$$(x-2)(x-3) > 0$$

Выполним нули

$$x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$ ✓

N6

Пусть электродвигателей типа А всего сделано x , а типа В - y
составим систему

$$2x + 3y = 146$$

$$4x + 5y = 258$$

$$x = 73 - \frac{3}{2}y \quad (\text{из 1})$$

$$4(73 - \frac{3}{2}y) + 5y = 258$$

$$292 - 6y + 5y = 258$$

$$y = 34$$

$$x = 22$$

Ответ: 22 типа А, 34 типа В. ✓

N7

Затем формулу суммы арифметической прогрессии.

$$36 = \frac{4+5}{2} \cdot n$$

$n = 8$ - столько чисел

Ответ: 8 ✓

N8

Пусть $AB = a$

Выразим радиус окружности
через a . Пусть $OH = r$.

$$S_{AOB} = AO \cdot OB \cdot \frac{1}{2} = AD \cdot OH \cdot \frac{1}{2}$$

$$AB = AD \cdot \cos 75^\circ$$

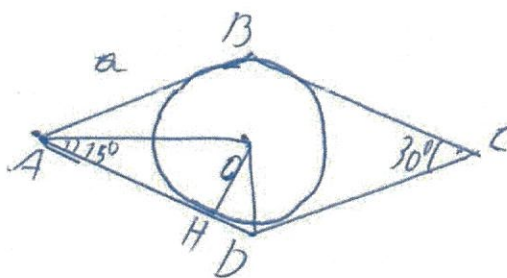
$$OB = AD \cdot \sin 75^\circ$$

Получим

$$a \cdot \cos 75^\circ \cdot a \cdot \sin 75^\circ = a \cdot OH$$

$$\frac{a^2 \sin 150^\circ}{2} = a \cdot OH$$

$$OH = \frac{a}{4}$$



Мет N3



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР

1075

Когда диаметр равен $\frac{a}{2}$, а квадрата черз ее диагональ

$$S_{\text{кв}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 90^\circ = \frac{a^2}{8}$$

$$S_{\text{раута}} = 2 \cdot AO \cdot 2 \cdot OP \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot a \cdot \cos 15^\circ \cdot a \cdot \sin 15^\circ = a^2 \cdot \sin 30^\circ = \frac{a^2}{2}$$

Погда

$$\frac{S_{\text{раута}}}{S_{\text{кв}}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a^2}{8}} = 4 \quad \checkmark$$

Ответ: 4

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ x+y=2\pi \end{cases}$$

$$x = \frac{2\pi}{3}, y = \frac{4\pi}{3}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3} - y\right) + \cos y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{2\pi}{3} \cos y - \cos \frac{2\pi}{3} \sin y + \cos y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos y + \frac{1}{2} \sin y + \cos y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos y \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$(1+\sqrt{3}) \cos y + \sin y = 1+\sqrt{3}$$

через двойной угол

$$\sin \alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{8+2\sqrt{3}}}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{8+2\sqrt{3}}}, \text{ Тогда}$$

$$\sqrt{8+2\sqrt{3}} \left(\sin(y + \arcsin \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{8+2\sqrt{3}}}) \right) = 1+\sqrt{3}$$

$$\sin(y + \arcsin \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{8+2\sqrt{3}}}) = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{8+2\sqrt{3}}}$$

$$y + \arcsin \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{8+2\sqrt{3}}} = \arcsin \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{8+2\sqrt{3}}} + 2\pi n$$

Если выразить x через y или наоборот, то после раскрытия выражения $\sin(\frac{2\pi}{3})$ получаем формулу $\sin(x+y)$. $\Rightarrow x$ и y всегда симметричны в выражении $x+y$, тогда $x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, что и

Ответ: $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

другие
решения

лист 14

ШИФР _____

170

$$\sqrt[3]{40+\sqrt{7573}} + \sqrt[3]{40-\sqrt{7573}}$$

$$40^2 = 1600, \Rightarrow \text{выражение имеет вид}$$

обозначим данное выражение через a .
Найдём a^3 .

$$a^3 = 40 + \sqrt{7573} + 3\sqrt[3]{40+\sqrt{7573}} \cdot \sqrt[3]{27} + 3\sqrt[3]{40-\sqrt{7573}} \cdot \sqrt[3]{27} + 40 - \sqrt{7573}$$

$$a^3 = 80 + 9(\sqrt[3]{40+\sqrt{7573}} + \sqrt[3]{40-\sqrt{7573}}) - \text{равняется } a.$$

Получим

$$a^3 = 80 + 9a$$

$$a^3 - 9a - 80 = 0$$

через делители свободного члена находим $a=5$

$$125 - 45 - 80 = 0$$

$$0 = 0$$

$$a^2 + 5a + 16 = 0$$

$$D = 25 - 64 < 0 \Rightarrow \text{больше корней нет.}$$

Значит, значение выражения равно 5.

Ответ: 5 ✓

$$\begin{array}{r}
 a^3 - 9a - 80 \quad | \quad a-5 \\
 \underline{-a^2 + 5a} \\
 5a^2 - 9a \\
 \underline{-5a^2 + 25a} \\
 76a - 80 \\
 \underline{-76a + 80} \\
 0
 \end{array}$$

лист 15