ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 16829

Класс 11 Г Вариант 042 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания МБОУ Гимназия

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	0	0	4	8	8	0	12	6	10	16	64	шестьдесят четыре	3Г

Задание 7

$\sqrt{x^4-2x^2+1} > 1-x;$

ОДЗ: $x^4-2x^2+1 \geq 0$

$x^2=t;\ t \geq 0$

$t^2-2t+1 \geq 0$

$D=b^2-4ac=4-4=0$

$t_1=t_2=1;$

$(t-1)^2 \geq 0$

$t \in (-\infty;+\infty) \Rightarrow x^2 \in (-\infty;+\infty)$ - (у замены.

$x \in (-\infty;+\infty)$

Решение

$\sqrt{(x^2-1)^2} = \sqrt{x^4-2x^2+1}$

$\sqrt{(x^2-1)^2} > 1-x$

$|x^2-1| > 1-x$

1) При $x^2-1>0$:

$x^2-1>1-x$

$x^2+x-2>0$

$D=b^2-4ac=3^2$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm3}{2};$

$(x-1)(x+2)>0$

$x \in (-\infty;-2) \cup (1;+\infty)$

2) При $x^2-1<0$:

$-x^2+1>1-x$

$-x^2+x>0$

$x^2-x<0$

$(x-0)(x-1)<0$

$x \in (0;1)$

Найдем совокупность решений двух случаев:

$-2 \quad 0 \quad 1 \quad x$

+

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$

Задание 9

$4^x + (a^2+5)\cdot 2^x - a^2 + 9 = 0$

$2^x = t;\ t > 0$

$t^2 + (a^2+5)t + (9-a^2) = 0$

Чтобы уравнение не имело решений, необходимо чтобы дискриминант был отрицателен.

$D = b^2 - 4ac = (a^2+5)^2 - 4(9-a^2) = a^4 + 10a^2 + 25 - 36 + 4a^2 =$
$= a^4 + 14a^2 - 11 < 0$

$a^4 + 14a^2 - 11 < 0$

$a^2 = d,\ d \geq 0$

$d^2 + 14d - 11 < 0$

$D = b^2 - 4ac = 196 + 44 = 240$

$d_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{240}}{2} = \frac{-14 \pm 4\sqrt{15}}{2} = -7 \pm 2\sqrt{15}$

$+ \quad - \quad +$

$-7-2\sqrt{15} \quad -7+2\sqrt{15} \quad d$

$\begin{cases} d > -7-2\sqrt{15}, \\ d < -7+2\sqrt{15}; \end{cases}$

Второй случай!

Обратная замена:

$\begin{cases} a^2 > -7-2\sqrt{15} \text{ при любых } a \\ a^2 < -7+2\sqrt{15}; \end{cases}$

±

$2\sqrt{15} > 7$, т.к. $60 > 49 \Rightarrow -7+2\sqrt{15} > 0$

$a^2 < -7+2\sqrt{15}$,

$a^2 - 2\sqrt{15} - 7 < 0$

$(a - \sqrt{2\sqrt{15}-7})(a + \sqrt{2\sqrt{15}-7}) < 0$

$+ \quad - \quad +$

$-\sqrt{2\sqrt{15}-7} \quad \sqrt{2\sqrt{15}-7}$

Ответ: $a \in (-\sqrt{2\sqrt{15}-7}; \sqrt{2\sqrt{15}-7})$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

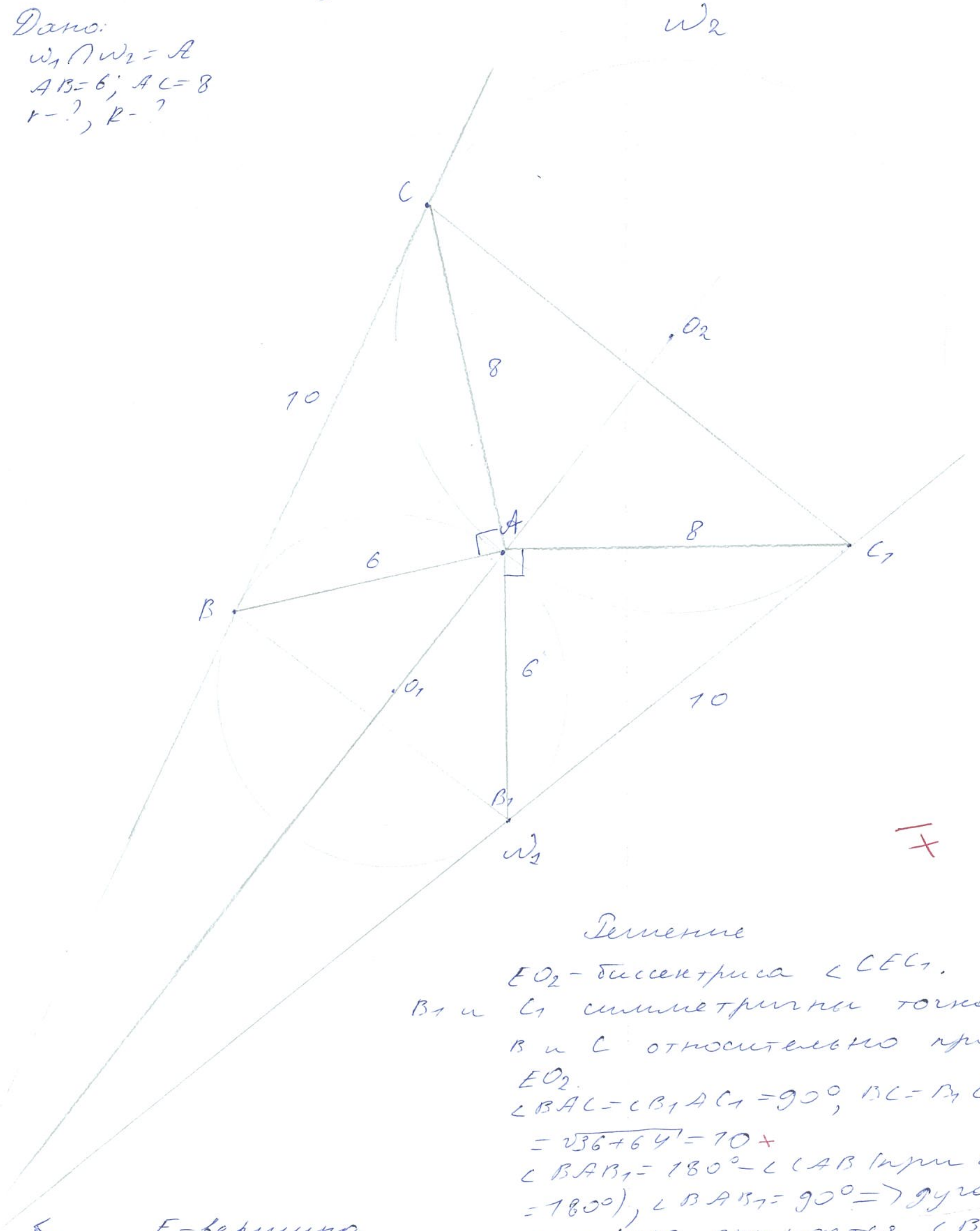
$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 16829

Задача 8

Дано:
$\omega_1 \cap \omega_2 = A$
$AB=6$; $AC=8$
$r - ?$, $R - ?$



+

Решение

EO_2 – биссектриса $\angle CEC_1$.

B_1 и C_1 симметричны точкам B и C относительно прямой EO_2.

$\angle BAC = \angle B_1AC_1 = 90°$, $BC = B_1C_1 = \sqrt{36+64} = 10$ +

$\angle BAB_1 = 180° - \angle CAB$ (при $\angle CAB_1 = 180°$), $\angle BAB_1 = 90° \Rightarrow$ дуга, на которую опирается $\angle BAB_1$ – $180°$, значит BB_1 – диаметр ω.

$BB_1 = \sqrt{6^2+6^2} = 6\sqrt{2} \Rightarrow r = 3\sqrt{2}$

Аналогично в $\triangle CAC_1$

$R = \frac{1}{2}CC_1 = \frac{1}{2}\sqrt{128} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $3\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$

$\leftarrow$ E – вершина угла

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 16829

Задание 3

$$\frac{\cos^2 3t}{tg t} + \frac{\cos^2 t}{tg 3t} = 0$$

ОДЗ: $\begin{cases} tg t \neq 0 \\ tg 3t \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \\ t \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z \end{matrix}$ ×

$$\frac{\cos^2 3t \cdot tg 3t + \cos^2 t \cdot tg t}{tg t \cdot tg 3t} = 0$$

$$\frac{\frac{\cos^2 3t \cdot \sin 3t}{\cos 3t} + \frac{\cos^2 t \cdot \sin t}{\cos t}}{tg t \cdot tg 3t} = 0$$

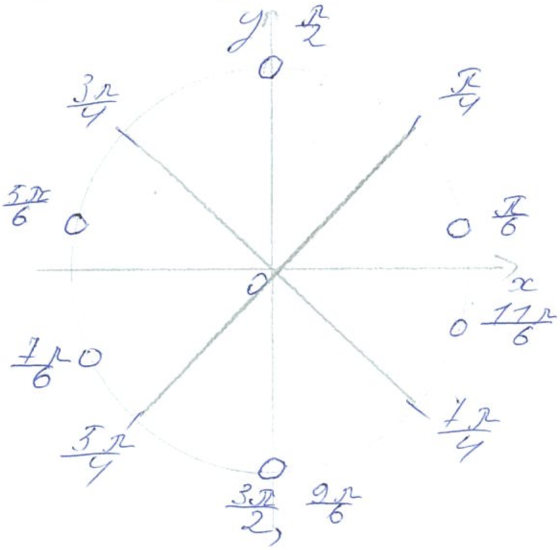
$\cos 3t \sin 3t + \cos t \sin t = 0$ при $tg t \neq 0$ и $tg 3t \neq 0$

$\cos(3t - t) = 0$

$\cos 2t = 0$

$2t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$



Все найденные корни входят в ОДЗ

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$

Задание 5

x – процент содержания спирта в растворе

После 1 переливания: допустим, в сосуде изначально 1 литр = 1000 мл спирта, тогда $\frac{1}{5}$ была – 200 мл

Первое переливание: $x = \frac{100 \cdot (1000 - 200)}{1000} = \frac{100 \cdot 800}{1000} = 80\%$

Второе: $x = \frac{80 \cdot 800}{1000} = 64\%$

Третье: $x = \frac{64 \cdot 800}{1000} = 51{,}2\% \approx 51\%$

Четвертое: $\frac{51 \cdot 800}{1000} = 40{,}8\%$

Пятое: $\frac{40{,}8}{1000} \cdot 800 \approx 32{,}8\%$

Шестое: $\frac{32{,}8 \cdot 800}{1000} \approx 26{,}24\% \Rightarrow$ после шестого перелива-

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 16829

раствор будет содержать 26,24%, что меньше 30% => наименьшее $n=6$

Ответ: 6

Задание 10

$$\frac{(1+27+125+\ldots+(2n-1)^3)}{1+4+7+\ldots+(3n-2)}=35$$

$$\frac{1+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3}{1+4+7+\ldots+(3n-2)}=35$$

Рассмотрим знаменатель:

$1+4+7+\ldots+(3n-2)$ – арифметическая прогрессия

$S=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{1+(3n-2)}{2}\cdot n=\frac{3n-1}{2}\cdot n$

Рассмотрим числитель:

По условию $1+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$

Тогда:

$$\frac{n^2(2n^2-1)}{3n^2-n}\cdot 2=35$$

$$\frac{2n(2n^2-1)}{3n-1}=35$$

$4n^3-2n=105n-35;$

$4n^3-2n-105n+35=0$

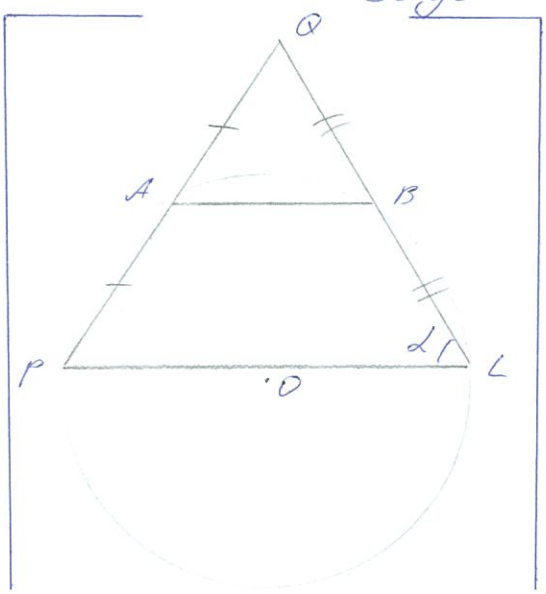
среди делителей числа 35 $(\pm1;\pm5;\pm7;\pm35)$ подходит 5:

$4\cdot5^3-2\cdot5-105\cdot5+35=500-10-525+35=535-535=\underline{0}$

Значит, $n=5$

Ответ: 5

Задание 4



Дано: AB – ср. линия $\triangle PQL$

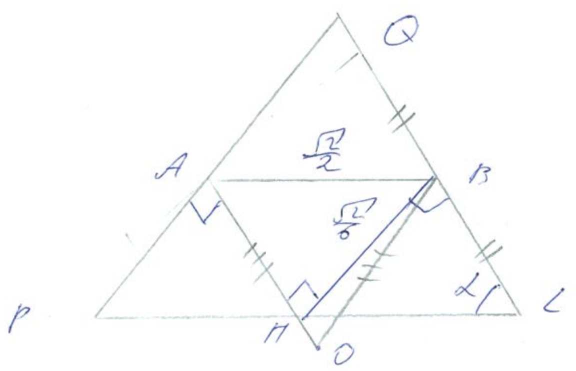
$\angle PLQ=\alpha$

$\sin\alpha=\frac{7}{3}$, $PL=\sqrt{2}$

Найти: R

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 16829



ω_1 проходит через точку A и касается PQ, $A \in PQ$, значит A — точка касания.
Проведем радиусы OA и OB,
$OA = OB = R$
$PQ \perp OA$, т.к. A — точка касания
Проведем среднюю линию BH, тогда $BH \perp AO$ и
$PH = HL = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
$BH = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}$;
из $\triangle ABH$: $AH = \sqrt{\frac{2}{4} - \frac{2}{36}} =$
$= \frac{\sqrt{7}}{6}$, тогда $R = \frac{\sqrt{7}}{6} \cdot 3 = \frac{\sqrt{7}}{3}$;

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{3}$.