ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

(ab)c=a(bc) E=mc²

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 26485

Класс 10 Вариант 41 Дата Олимпиады 10.02.2018

Площадка написания ООО „ГАЗПРОМ ТРАНСГАЗ ЧАЙКОВСКИЙ"

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	4	3	2	8	12	4	16	0	16	69	шестьдесят девять	

шестьдесят девять
апелляция
Баклеева -

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 26485

№1

Преобразуем выражение A:

$$A=\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}}:\frac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab}\cdot\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}}\cdot\frac{a^2+2ab+b^2-3ab}{a^2b^2}\cdot\frac{ab}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{(b-a)a^3b^3}{ab(a^3+b^3)}\cdot\frac{(a^2+b^2-ab)}{a^2b^2}\cdot\frac{ab}{(a+b)(a-b)}$$

Т.к. $a\neq b\neq 0 \neq -b$, то можно сокращать выражения a, b, $(a+b)$, $(a-b)$; $(b-a)=-$

$$A=\frac{-ab(a^2+b^2-ab)}{(a+b)(a^2+b^2-ab)\cdot(a+b)}=\cancel{\frac{-ab}{(a+b)^2}}$$

Если $a=1-\sqrt2$; $b=1+\sqrt2$, то $a^2+b^2-ab=$

$=1-2\sqrt2+2+1+2\sqrt2+2-(-1)=7 \Rightarrow a^2+b^2-ab\neq0\Rightarrow$

$\Rightarrow A=\frac{-ab}{(a+b)^2}$; если $a=1-\sqrt2$, $b=1+\sqrt2$, то

$$A=\frac{-(1-\sqrt2)(1+\sqrt2)}{(1-\sqrt2+1+\sqrt2)^2}=\frac{1}{4}$$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 20485

№2

$\sqrt[3]{(5+x)^2}+4\sqrt[3]{(5-x)^2}=5\sqrt[3]{25-x^2}$

$\sqrt[3]{(5+x)^2}+4\sqrt[3]{(5-x)^2}=5\sqrt[3]{(5-x)(5+x)}$

1) При $x=5$ получаем, что $\sqrt[3]{10^2}=0$, но $\sqrt[3]{10^2}>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x\neq 5$

2) При $x=-5$ получаем, что $\sqrt[3]{10^2}=0$, но $4\sqrt[3]{10^2}>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x\neq -5$

3) Из (1) и (2) $\Rightarrow$ ур-е можно почленно поделить на $\sqrt[3]{(5-x)(5+x)}$; Поделив, получаем:

$\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}+4\sqrt[3]{\frac{5-x}{5+x}}=5$

Пусть $\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}=a$, тогда $\sqrt[3]{\frac{5-x}{5+x}}=\frac{1}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow a+\frac{4}{a}=5$

4) Из (1) и (2) $\Rightarrow a \Rightarrow 0 \Rightarrow$ ур-е можно умножить на a. Получаем

$a^2-5a+4=0$

По т. Виета $a=1$ или $a=4 \Rightarrow$

$\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}=1 \Rightarrow \frac{5+x}{5-x}=1 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow \underline{x=0}$

$\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}=4 \Rightarrow \frac{5+x}{5-x}=64 \Rightarrow 5+x=320-64x$; $65x=315 \Rightarrow$

ШИФР 26485

$\Rightarrow x = \frac{315}{65} = \frac{63}{13}$.

Ответ: $x = \frac{63}{13}$; $x = 0$

№3

$$\frac{tg\, t}{\cos^2 5t} - \frac{tg\, 5t}{\cos^2 t} = 0 \quad \Big| \times (\cos^2 5t \cdot \cos^2 t)$$

ОДЗ $\cos^2 5t \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos 5t \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow t \neq \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, k \in Z$
$\cos^2 t \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

$$\frac{tg\, t \cos^2 t - tg\, 5t \cdot \cos^2 5t}{\cancel{\cos^2 t}} = 0$$

$\sin t \cos t - \sin 5t \cos 5t = 0$

$\frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{2} \sin 10t = 0$

$\sin 2t - \sin 10t = 0$

$2 \sin \frac{2t - 10t}{2} \cos \frac{10t + 2t}{2} = 0$

$2 \sin(-4t) \cos 6t = 0$

$-\sin(4t) \cos 6t = 0$

$\sin 4t \cos 6t = 0$

$\sin 4t = 0$ или $\cos 6t = 0$

$\sin 4t = 0 \Rightarrow 4t = \pi \cdot k, k \in Z$
$\Rightarrow t = \frac{\pi k}{4}; k \in Z$
$\cos 6t = 0 \Rightarrow 6t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \Rightarrow$
$\Rightarrow t = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}; k \in Z$
Оба ответа попадают в ОДЗ $\Rightarrow$
$\Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, k \in Z$
$t_2 = \frac{\pi k}{4}; k \in Z$

не все $t_2 \in$ ОДЗ.

ОДЗ!

№5

Пусть в сосуде было X л. спирта.

Тогда после 1 переливания останется $\frac{2}{3}$ X л. спирта

после 2-го останется $\left(\frac{2}{3}\right)^2 X$ л. спирта.

Аналогично, после K-го переливания

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 26485

Останется $\left(\frac{2}{3}\right)^k x$ л. спирта, тогда процентное содержание спирта будет равно $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k x}{x}\cdot 100\% = \left(\frac{2}{3}\right)^k\cdot 100\%$

По условию $\left(\frac{2}{3}\right)^k\cdot 100\% < 10\% \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2^k}{3^k}\cdot 10 < \cancel{10}\ 1 \Rightarrow 2^k\cdot 10 < 3^k$

Очевидно, что k – натуральное число, тогда найдем значения выражений $2^k\cdot 10$ и 3^k для первых натуральных чисел и найдем наименьшее k, при котором $2^k\cdot 10 < 3^k$

K	1	2	3	4	5	6
$2^k\cdot 10$	20	40	80	160	326	640
3^k	3	9	27	81	243	~~7~~32

Из таблицы находим, что $k=6$

Ответ: $k=6$

№ 9

$3^x+(b^2+6)\cdot 3^x-b^2+16=0$

$3^{2x}+(b^2+6)\cdot 3^x-b^2+16=0$

Пусть $3^x=a$, $a>0$. Если уравнение не имеет решений, то не существует числа x, для которого $3^{2x}+(b^2+6)\cdot 3^x-b^2+16=0$, а значит и не существует числа $3^x=a$. Тогда $a^2+(b^2+6)a-b^2+16=0$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 26485

Или ее не существует, но дискриминант ур-я отрицательный.

$D=(b^2+6)^2-4(16-b^2)=b^4+12b^2+36-64+4b^2=$

$=b^4+16b^2-28<0$

~~$D'=256+4\cdot 28=368$~~

Пусть $b^2=c \Rightarrow c^2+16c-28<0$

Найдем нули выражения.

$D'=256+112=368$

$c_1=\frac{-16+\sqrt{368}}{2}$; $c_2=\frac{-16-\sqrt{368}}{2}$

$+$ $\quad\frac{-16-\sqrt{368}}{2}\quad$ $-$ $\quad\frac{-16+\sqrt{368}}{2}\quad$ $+$ $\quad c$

Очевидно, что $c\in\left(\frac{-16-\sqrt{368}}{2};\frac{-16+\sqrt{368}}{2}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-16-\sqrt{368}}{2}<b^2<\frac{-16+\sqrt{368}}{2}$

$-8-\sqrt{92}<b^2<-8+\sqrt{92}$

Т.к. $-8-\sqrt{92}<0$ ~~(т.к. …)~~ $\Rightarrow b$

$\Rightarrow 0<b^2<\sqrt{92}-8 \Rightarrow$

$\Rightarrow b\in(-\sqrt{92}+8;\sqrt{92}-8)$

$\sqrt{4-4x^3+x^6} > x-\sqrt[3]{2}$

Рассмотрим выражение x^6-4x^3+4.

Т.к. оно находится под кв. корнем, то

$x^6-4x^3+4\geq 0 \Rightarrow (x^3-2)^2\geq 0$

Т.к. квадрат любого числа неотрицателен, то $\boxed{x\in R}$

$\sqrt{(x^3-2)^2} > x-\sqrt[3]{2}$

$|x^3-2| > x-\sqrt[3]{2}$

1) Если $x^3-2\geq 0 \Rightarrow x\geq\sqrt[3]{2}$, то

$x^3-2 > x-\sqrt[3]{2}$

$(x-\sqrt[3]{2})(x^2+x\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2)-(x-\sqrt[3]{2})>0$

$(x-\sqrt[3]{2})(x^2-x\sqrt[3]{2}-(\sqrt[3]{2})^2-1)>0$

Т.а. $x\geq\sqrt[3]{2} \Rightarrow x-\sqrt[3]{2}\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-x\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}^2-1>0$

$D=\sqrt[3]{2}^2-4(-\sqrt[3]{2}^2-1)=\sqrt[3]{2}^2+4\sqrt[3]{2}+4=4+5\sqrt[3]{2}^2$

$x_1=\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{4+5\sqrt[3]{2}^2}}{2}$; $x_2=\frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt{4+5\sqrt[3]{2}^2}}{2}$

$x\in\left(-\infty;\frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt{4+5\sqrt[3]{2}^2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{4+5\sqrt[3]{2}^2}}{2};\infty\right)$

Т.к. $x\geq\sqrt[3]{2} \Rightarrow x\in\left(\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{4+5\sqrt[3]{2}^2}}{2};\infty\right)$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 26485

2) ~~если~~ $x < \sqrt[3]{2}$, то

$-x^3+2 > x-\sqrt[3]{2}$

$-(x-\sqrt[3]{2})(x^2+x\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}^2)-(x-\sqrt[3]{2})>0$

$-(x-\sqrt[3]{2})(x^2-x\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}^2+1)>0$

Т.к. $x<\sqrt[3]{2} \Rightarrow x-\sqrt[3]{2}<0 \Rightarrow -(x-\sqrt[3]{2})>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-x\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}^2+1>0$

$D=\sqrt[3]{2}^2+4\sqrt[3]{2}^2-4 = 5\sqrt[3]{2}^2-4$

F

$x_1 = \frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{5\sqrt[3]{2}^2-4}}{2}$; $x_2 = \frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt{5\sqrt[3]{2}^2-4}}{2}$

$x \in \left(-\infty; \frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt{5\sqrt[3]{2}^2-4}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{5\sqrt[3]{2}^2-4}}{2}\right)$

Т.к. $x<\sqrt[3]{2} \Rightarrow x \in \left(-\infty; \frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt{5\sqrt[3]{2}^2-4}}{2}\right)$

Объединяем результаты (1) и (2):

$x \in \left(-\infty; \frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt{5\sqrt[3]{2}^2-4}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{4+5\sqrt[3]{2}^2}}{2}; \infty\right)$

В

$n: 10$

$(1+3+5+\dots(2n+1)) : \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{342}\right)=342$

Заметим, что $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\dots\frac{1}{342} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{18\cdot 19} = \frac{18}{19} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1+3+5+\dots(2n+1)) = 342 \cdot \frac{18}{19} = 18^2$

Заметим, что сумма $(1+3+5+\dots(2n+1))$ – ~~ариф~~

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 26485

сумма арифм. прогрессии

Ее члены: $(2\cdot 0+1)+(2\cdot 1+1)+\ldots+(2n+1)$

Очевидно, что всего $n+1$ членов, тогда

сумма $(1+3+5+\ldots(2n+1))=\frac{2n+1+1}{2}\cdot n+1=(n+1)^2$

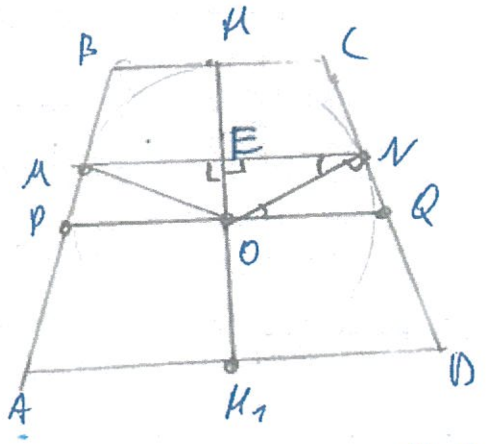
Получаем что $(n+1)^2=18^2 \Rightarrow n+1=18$

$(\text{т.к. } n>0) \Rightarrow n=17$.

+

Ответ: $n=17$

№ 8



Т.к. трапеция равнобедренная, то из соображений симметрии $BH=HC$; $AH_1=H_1D$; HH_1 – высота трапеции.

$HH_1=OH+OH_1=10$ см

Через точку O проведем $PQ \parallel AD$

Т.к. $HO=H_1O$, то по теор. Фалеса

$BP=PA$; $CQ=QD \Rightarrow PQ$ – ср. линия $ABCD$

$\Rightarrow S_{ABCD}=PQ\cdot HH_1$

По теор. Пифагора в $\triangle EON$: $EO=\sqrt{EN^2+ON^2}=\sqrt{\frac{MN^2}{4}+ON^2}=3$

Т.к. $MN \parallel PQ$, то $\angle MNO=\angle NOQ$; В $\triangle ENO$ и $\triangle NOQ$

$\angle ONQ=\angle OEN=90^\circ$; $\angle MNO=\angle NOQ \Rightarrow \triangle ENO \sim \triangle NOQ \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{OQ}{ON}=\frac{ON}{EN} \Rightarrow OQ=\frac{ON^2}{EN}=\frac{25}{4} \Rightarrow PQ=2OQ=\frac{25}{2}$ см

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 26485

$S = PQ \cdot HH_1 = \frac{25}{2} \cdot 10 = 25 \cdot 5 = 125$ см^2

Ответ: $S = 125$ см^2

№ 6

Пусть $\alpha > \beta > \gamma \Rightarrow \alpha = \beta + \frac{\pi}{12} = \gamma + \frac{2\pi}{12} = \gamma + \frac{\pi}{6}$

(1) Т.к. ~~на пр~~ в I четверти функция $y = tg\,x$ – монотонная и возрастающая, то если $\alpha > \beta > \gamma \Rightarrow tg\,\alpha > tg\,\beta > tg\,\gamma$

Пусть $tg\,\alpha = k\,tg\,\beta = k^2 tg\,\gamma$

$tg\,\alpha = k^2 tg\,\gamma = tg\left(\gamma + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{tg\,\gamma + tg\frac{\pi}{6}}{1 - tg\,\gamma\, tg\frac{\pi}{6}} = \frac{tg\,\gamma + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} tg\,\gamma}$

$k^2 tg\,\gamma = \frac{tg\,\gamma + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} tg\,\gamma} \Rightarrow k^2 tg\,\gamma - k^2\frac{\sqrt{3}}{3} tg^2\gamma = tg\,\gamma + \frac{\sqrt{3}}{3}$

$tg^2\gamma\left(k^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + tg\,\gamma(1 - k^2) + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$

Решим это ур-е отн-но $tg\,\gamma$.

Из (1) $\Rightarrow tg\,\gamma$ имеет единственное значение на промежутке $\gamma \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow D = 0$

$D = (1 - k^2)^2 - 4\frac{\sqrt{3}}{3}\left(k^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \cancel{k^4 + 1 - 2k^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}k^2}$

$= k^4 - 2k^2 + 1 - \frac{4}{3}k^2 = k^4 - \frac{10}{3}k^2 + 1 = 0$

$D' = \frac{100}{9} - 4 = \frac{64}{9} = \frac{8^2}{3^2}$

$k^2 = \frac{\frac{10}{3} \pm \frac{8}{3}}{2}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 26485

1) Если $k^2 = \frac{\frac{10}{3}+\frac{8}{3}}{2} = \frac{18}{3\cdot 2} = 3 \Rightarrow k=\sqrt{3}$, тогда

~~$tg\alpha = \sqrt{3}\, tg\gamma$~~

$tg\gamma = \frac{k^2-1}{2k\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4};\ \alpha = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$

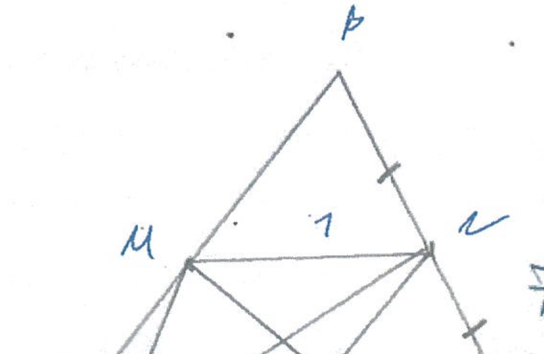
2) ~~Если~~ $k^2 = \frac{\frac{10}{3}-\frac{8}{3}}{2} = \frac{1}{3}$ невозможно из (1)

$\Rightarrow$ Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$\beta = \frac{\pi}{4}$

$\gamma = \frac{\pi}{6}$

№4



Т.к. окружность (далее – ω) касается AB и проходит через M, то $OM \perp AB$

~~Т.к.~~ Пусть $\omega \cap AC = D$

Т.к. DMNC – впис. четырехуг., то $\angle DMN + \angle DCN = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ если $\angle BCA = \alpha \Rightarrow \angle DMN = 180 - \alpha$

т.к. $MN \parallel DC \Rightarrow$ MNCD – трапеция $\Rightarrow \angle MNC = 180-\alpha$;

$\angle MDC = 180-(180-\alpha) = \alpha$; т.к. $\angle MDC = \angle NCD \Rightarrow$

$\Rightarrow MD = NC$; т.к. MN – ср. линия $\Rightarrow MN = \frac{AC}{2} = 1$

$\sin\alpha$ – ?