ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 24682

Класс 11 **Вариант** 41 **Дата Олимпиады** 10.02.2018

Площадка написания МАОУ СОШ №53

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка													

1. $\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}} : \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2-3ab} \cdot \left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1} = \left(\frac{a-b}{ab}\right) / \left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right) \cdot \frac{(a^2+b^2+2ab-3ab)}{a^2 \cdot b^2} \cdot$

$\cdot \frac{ab}{(a-b)(a+b)} = \frac{\cancel{(a-b)} \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot (a^2+b^2-ab) \cdot \cancel{ab}}{\cancel{ab} \cdot (a^3+b^3) \cdot \cancel{a^2} \cdot \cancel{b^2} \cdot \cancel{(a-b)}(a+b)} = \frac{a \cdot b \cdot (a^2+b^2-ab)}{(a+b)(a+b) \cdot (a^2+b^2-ab)}$

$= \begin{cases} \frac{a \cdot b}{(a+b)^2} \\ a = 1-\sqrt{2} \\ b = 1+\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2})^2} = \frac{(1-2)}{4} = -\frac{1}{4} = -0{,}25 \end{cases}$

2. $\sqrt[3]{(5+x)^2} + 4\sqrt[3]{(5-x)^2} = 5\sqrt[3]{25-x^2}$

$(5+x)^{\frac{2}{3}} + 4 \cdot (5-x)^{\frac{2}{3}} = 5(5-x)^{\frac{1}{3}} \cdot (5+x)^{\frac{1}{3}}$

$(5+x)^{\frac{2}{3}} + 4 \cdot (5-x)^{\frac{2}{3}} - 5(5-x)^{\frac{1}{3}} \cdot (5+x)^{\frac{1}{3}} = 0 \quad \Big| : (5-x)^{\frac{2}{3}} \quad x \neq 5$

(при подел. ответ не верен)

$\cancel{\left(\frac{5+x}{5-x}\right)^{\frac{2}{3}}} \quad \left(\frac{5+x}{5-x}\right)^{\frac{2}{3}} + 4 - \left(\frac{5+x}{5-x}\right)^{\frac{1}{3}} = 0$

$\left(\frac{5+x}{5-x}\right)^{\frac{1}{3}} = b$

$b^2 + 4 - 5b = 0$

$b_1 = 1$

$b_2 = 4$

1 лист.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 24682

2 (продол.) Обр. замена $b=\sqrt[3]{\frac{(5+x)}{(5-x)}}$

$\sqrt[3]{\frac{(5+x)}{(5-x)}}=1$

$\frac{5+x}{5-x}=1$

$\frac{5+x-5+x}{5-x}=0$

$x=0$

Отв. $x=0$

$\sqrt[3]{\frac{(5+x)}{(5-x)}}=4$

$\frac{5+x}{(5-x)}=64$

$\frac{5+x-320+64x}{(5-x)}=0$

$\frac{65x-315}{(5-x)}=0$

$\frac{-65(5-x)}{(5-x)}=0$

нет решений.

3. $\frac{tg(t)}{\cos^2 5t}-\frac{tg\,5t}{\cos^2 t}=0$

ОДЗ: $\begin{cases}\cos^2 5t\neq 0\\ \cos^2 t\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t\neq \frac{2\pi n}{10}+\frac{\pi}{10} & n\in N\\ t\neq \pi n+\frac{\pi}{2} & n\in N\end{cases}$

$\frac{tg\,t\cdot\cos^2 t-tg\,5t\cdot\cos^2 5t}{\cos^2 5t\cdot\cos^2 t}=0$

$\begin{cases}\sin t\cdot\cos t-\sin 5t\cdot\cos 5t=0\\ \cos^2 5t\neq 0\\ \cos^2 t\neq 0\end{cases}$

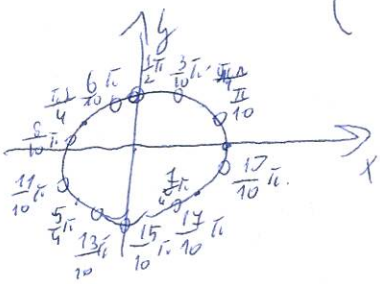
2 лист

3. (прод.)
$$\begin{cases} \frac{\sin 2t}{2} - \frac{\sin 10t}{2} = 0 \\ \cos^2 5t \neq 0 \\ \cos^2 t \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(-4t)\cdot\cos(6t) = 0 \\ \cos^2 5t \neq 0 \\ \cos^2 t \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4t = \pi n \\ \cos^2 5t \neq 0 \\ \cos^2 t \neq 0 \end{cases} n \in N \quad \text{или} \quad \begin{cases} 6t = \pi n + \frac{\pi}{2} \\ \cos^2 5t \neq 0 \\ \cos^2 t \neq 0 \end{cases} n \in N$$

$$\begin{cases} t = \frac{1}{4}\pi n \\ \cos^2 5t \neq 0 \\ \cos^2 t \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \frac{1}{6}\pi n + \frac{\pi}{12} \\ \cos^2 5t \neq 0 \\ \cos^2 t \neq 0 \end{cases}$$



Отв. $t = \pi n$; $t = \pm\frac{1}{4}\pi + \pi n$, $n \in N$

$\cancel{t = \frac{2}{12}\pi n + \frac{\pi}{12}}$

$t = \pm\frac{\pi}{12} + \pi n$

$t = \pm\frac{5}{12} + \pi n$

3 лист.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 24682

10. $(1+3+\ldots+(2n+1)):\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{342}\right)}=342$

по данной формуле равно $\frac{18}{19}$, т.к.

$342=18\cdot 19=(16+2)\cdot(16+1)$

$(1+3+\ldots+(2n+1))\cdot\frac{19}{18}=18\cdot 19$

$\underbrace{(1+3+\ldots+(2n+1))}_{\text{арифм. прогрессия}}=18^2$

$S=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n'=\cancel{a_1+}\left(\frac{1+2n+1}{2}\right)\cdot(n+1)$

выражаете через формулу

$a_n=a_0+d\cdot(n'-1)$

$2n+\cancel{1}=\cancel{1}+2\cdot(n'-1)$

$2n=2n'-2$

$n'=n+1$

$\Downarrow$

$(n+1)^2=18^2$

$\Updownarrow$

$n+1=18$

$n=17$

Отв. $n=17$

9. $9^x+(b^2+6)\cdot 3^x-b^2+16=0$

Замена $3^x=y$

$\begin{cases} y>0 \\ y^2+(b^2+6)\cdot y-b^2+16=0 \end{cases}$

4 лист

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 24682

9 (продол.)

Рассмотрим случ., когда нет решений

1. $D<0$

2. $\begin{cases} D=0 \\ -\frac{b}{2a}<0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} D>0 \\ f(0)\geq 0 \\ -\frac{b}{2a}<0 \end{cases}$

1. $D=(b^2+6)^2-4(-b^2+16)<0$

$b^4+36+12b^2+4b^2-64<0$

~~$b^4+36+12b^2-$~~

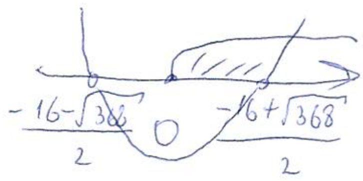
$b^4+16b^2-28<0$

Замена $c=b^2$

$\begin{cases} c\geq 0 \\ c^2+16c-28<0 \end{cases}$

$D=256+28\cdot 4=368$

$c_{1,2}=\frac{-16\pm\sqrt{368}}{2}$



$c\geq 0$

$c<\frac{-16+\sqrt{368}}{2}$

Обр. замена $c=b^2$

$\begin{cases} b^2\geq 0 \text{ - всегда} \\ b^2<\frac{-16+\sqrt{368}}{2} \end{cases}$

$-\sqrt{\frac{-16+\sqrt{368}}{2}}<b<\sqrt{\frac{-16+\sqrt{368}}{2}}$

5 лист

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 24682

9 (продол.)

2. $\begin{cases} D=0 \Rightarrow \cancel{b=\pm\sqrt{\frac{-16+\sqrt{368}}{2}}} \\ -\frac{b}{2a} \cancel{\ne 0} \; -\left(\frac{b^2+6}{2}\right)<0 \end{cases}$

$\begin{cases} b=\pm\sqrt{\frac{-16+\sqrt{368}}{2}} \\ b^2+6>0 \text{ – выполн. всегда.} \end{cases} \Rightarrow b=\pm\sqrt{\frac{-16+\sqrt{368}}{2}}$

3. $\begin{cases} D>0 \\ f(0)\geq 0 \\ -\frac{b}{2a}<0 \text{ – выполн. всегда (из 2 пункта)} \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} b<-\sqrt{\frac{-16+\sqrt{368}}{2}} \\ b>\sqrt{\frac{-16+\sqrt{368}}{2}} \\ -b^2+16\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b<-\sqrt{\frac{-16+\sqrt{368}}{2}}=a' \\ b>\sqrt{\frac{-16+\sqrt{368}}{2}}=a'' \\ b^2\leq 16 \end{cases}$

Сравним.

4 и $\sqrt{\frac{-16+\sqrt{368}}{2}}$

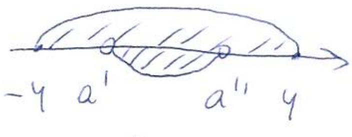
$16 > \frac{-16+\sqrt{368}}{2}$

$\Uparrow$

$24 > \frac{\sqrt{368}}{2}$

$\Uparrow$

$576 > \frac{368}{4}$



$\Downarrow$

$x\in[-4;a')\cup(a'';4]$

Соединяя все 3 случая получаем, что $x\in[-4;4]$.

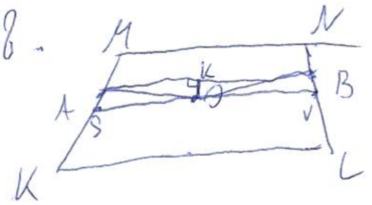
6 лист

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 24682

8.



$S(O; R)$ – окружность с центром в т. O и радиусом R

$R = 5$

$AB = 8.$

① Т.к. окр. касается сторон., то радиусы будут перпенд. сторонам, следовательно высота будет равна $2 \cdot R = 10$

② Т.к. трапеция равнобедренная и в неё вписана ~~окруж.~~, (то расстояние от точек касания боковых рёбер будет) то средняя линия будет равна боковой стороне ($\Rightarrow \frac{KL+MN}{2} \overset{\text{св. впис. окр.}}{=} \frac{KM+NL}{2} = KM$), а также $AB \parallel KL$

~~$\triangle OAB: OA = OB = 5$~~

~~$AB = 10$~~ 8

проведём прямую парал. KL и прох через O

$\triangle AOB: AO = OB = 5$

$AB = 8$

$\Downarrow$

~~$\cos\angle AOB =$~~

K – сер. AB

$\Downarrow$

$OK = 3$

~~$\cos\angle AOK =$~~

$OK \perp AB$ ($\triangle AOB$ – р-бед)

$\Downarrow$

~~OK~~ $\square AMNB \sim \square SMNV$

$\Leftarrow$

$\frac{OK}{R} = \frac{SB}{AB} \Rightarrow$ от $\frac{3}{5} = \frac{SB}{8} \Rightarrow SB = \frac{24}{5} = 4{,}8$

$S = (\text{с. л.}) \cdot h = SB \cdot h = SB \cdot 2R = 4{,}8 \cdot 10 = 48$

Отв. 48.

7 лист

7. $\sqrt{4-4x^3+x^6} > x-\sqrt[3]{2}$ ОДЗ: $\mathbb{R}$

$\sqrt{(x^3-2)^2} > x-\sqrt[3]{2}$

$|x^3-2|-x > -\sqrt[3]{2}$

① $\begin{cases} x \geq \sqrt[3]{2} \\ x^3-2-x > -\sqrt[3]{2} \end{cases}$

$x^3-x-2+\sqrt[3]{2} > 0$

② $\begin{cases} x \leq \sqrt[3]{2} \\ -x^3+2-x > -\sqrt[3]{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x^3+x-2-\sqrt[3]{2} < 0 \\ x \leq \sqrt[3]{2} \end{cases}$

	1	0	-1	$-2+\sqrt[3]{2}$
$\sqrt[3]{2}$	1	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2^2}-1$	0

① $(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{2}-1) > 0$

$D = 2^{\frac{2}{3}} - 4\cdot(\sqrt[3]{2^2}-1) =$

$= 2^{\frac{2}{3}}+4-4\cdot\sqrt[3]{2^2} < 0$

$3\cdot 2^{\frac{2}{3}} \vee 2^2$

$27\cdot 4 \vee 2^6$

$108 > 64$

$\Downarrow$

$3\cdot\frac{2}{3} > 4$

$\Downarrow$

$x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{2}-1 > 0$

$\Downarrow$

1. $x > \sqrt[3]{2}$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 24682

7 (продолж.)

② $\begin{cases} x^3+x-2-\sqrt[3]{2}<0 \\ x\le\sqrt[3]{2} \end{cases}$

Схема Горнера

	1	0	1	$-2-\sqrt[3]{2}$
$\sqrt[3]{2}$	1	$\sqrt[3]{2}$	$2^{\frac{2}{3}}+1$	0

$\begin{cases} (x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+2^{\frac{2}{3}}+1)<0 \\ x\le\sqrt[3]{2} \end{cases}$

$D=2^{\frac{2}{3}}-4\cdot(2^{\frac{2}{3}}+1)=$

$=-3^{\frac{2}{3}}-4<0$

$\Downarrow$

$x^2+\sqrt[3]{2}x+2^{\frac{2}{3}}+1>0$

$\Downarrow$

$x<\sqrt[3]{2}$

Соединяя 2 случая получаем

$x\in(-\infty;\sqrt[3]{2})\cup(\sqrt[3]{2};+\infty)$

5. ~~Сначала было X спирта, затем оно~~ уменьшилось в $\frac{2}{3}$ раза, ~~затем снова в $\frac{2}{3}$ раза~~ (т.к. воду долили), то процентное содержание спирта стало $\frac{2}{3}$, затем снова добавили воды и уменьшили процентное содержание в $\frac{2}{3}$ раза и так k раз, следовательно в конце стало

$\frac{2^k}{3^k}\cdot 100\%$ – спирта, т.к. нужно, чтобы было меньше 10%,

следовательно

$\frac{1}{10}=\frac{2}{3}^{\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{10}}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^k\cdot 100<10$

$\left(\frac{2}{3}\right)^k<\frac{1}{10}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^k<\frac{2}{3}^{\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{10}} \Rightarrow k>\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{10};\ k\in N$

ближайшее наименее натуральное k удовл. этому условию это 5

Ответ 5 раз

9 лист