ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 31400

Класс 11 Вариант 42 Дата Олимпиады 10.02-2018

Площадка написания МАОУ СОШ №10 (НОЦ) г. Чайковский

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	0	0	0	0	8	0	10	10	8	16	52	пятьдесят два	Зг

№7

$\sqrt{x^4-2x^2+1} > 1-x$ приведём к виду

$\sqrt{(x^2-1)^2} > 1-x$, т.к под корнем квадрат числа то он не отрицателен. $\Rightarrow$ ООЗ $x \in R$.

При вынесении из под корня число ~~должно~~ ол быть положительным $\Rightarrow$ нужен модуль.

$|x^2-1| > 1-x$, если выражение $x^2-1>0$ то модуль раскрываем со знаком $+$, а если $x^2-1<0$ то со знаком $-$.

После раскрытия получим 2 случая

а) $x^2-1 > 1-x$

$x^2-2+x>0$

$x^2+x-2>0$

б) $-(x^2-1) > 1-x$

$-x^2+1-1+x>0$

$x^2-x<0$

Решим неравенства методом интервалов.

а) $x^2+x-2=0$

б) $x^2-x=0$

решая уравнения получаем следующие корни

$\left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{array}\right.$

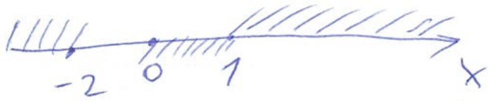
Покажем решения неравенств на ~~интервале~~ числовой прямой а)

$x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$

б)

$x \in [0; 1]$

Покажем решение этих неровенств на общей числовой прямой.



Ответ есть объеденение этих множеств

$x \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$

$(0;1)$ ✓

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$.

№ 9.

$4^x + (a^2+5)\cdot 2^x - a^2 + 9 = 0$ оно не имеет решений когда графики функции $f(x) = 4^x + (a^2+5)\cdot 2^x - a^2 + 9$ не пересекает ось абцисс.

Сделаем замену
$t = 2^x,\ 4^x = t^2 (4^x = 2^{2x})$

$t^2 + (a^2+5)\cdot t - a^2 + 9 = 0$ – это уравнение квадратичной функции, её графики парабола, ветьи вверх.

$D = b^2 - 4ac = (a^2+5)^2 - 4\cdot(9-a^2)$ Он не пересекается с осью абцисс когда дискриминант < 0. $\Rightarrow$ график лежит выше оси x.

$D = a^4 + 10\cdot a^2 + 25 - 36 + 4a^2 =$

$= a^4 + 14a^2 - 11$

$D < 0$

$a^4 + 14a^2 - 11 < 0$

замена $a^2 = z$

$z^2 + 14z - 11 < 0$ – Решим методом интервалов

$z^2 + 14z - 11 = 0$ – решим через дискриминант.

$D = 14^2 - 4\cdot -11 = 196 + 44 = 240$

$z_{1,2} = \dfrac{-14 \pm \sqrt{240}}{2}$

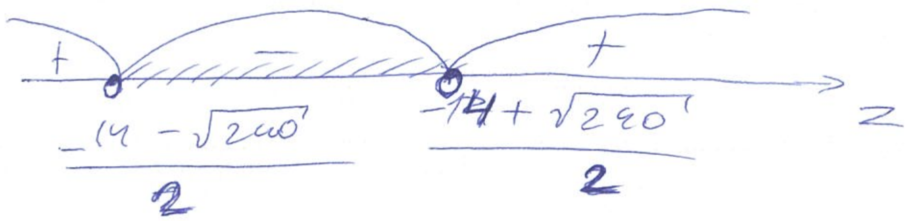
$z_1 = \dfrac{-14 + \sqrt{240}}{2}$, $z_2 = \dfrac{-14 - \sqrt{240}}{2}$

Покажем решение неравенства на числовой прямой

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 31400



$$z \in \left(\frac{-14-\sqrt{240}}{2}; \frac{-14+\sqrt{240}}{2}\right)$$

$$\begin{cases} z > \frac{-14-\sqrt{240}}{2} \\ z < \frac{-14+\sqrt{240}}{2} \end{cases}$$ обратная замена $z = a^2$ $$\Rightarrow \begin{cases} a^2 > \frac{-14-\sqrt{240}}{2} \\ a^2 < \frac{-14+\sqrt{240}}{2} \end{cases}$$

Квадрат числа не может быть отрицательным числом $\Rightarrow a^2 > 0$, тогда получим

$$\frac{-14+\sqrt{240}}{2} > a^2 > 0$$ – выразим корень квадратный тогда получим

$$\sqrt{\frac{-14+\sqrt{240}}{2}} > a > 0.$$

$\pm$ ВТОРОЙ случай?

$$a \in \left(0; \sqrt{\frac{-14+\sqrt{240}}{2}}\right)$$

Ответ: $\left(0; \sqrt{\frac{-14+\sqrt{240}}{2}}\right)$

№10.

Используя первое равенство можно переписать 2 равенство в виде:

$$n^2(2n^2-1) : (1+4+7+\ldots+(3n-2)) = 35$$

т.к. $n^2(2n^2-1) = 1^3+3^3+5^3+7^3+\ldots+(2n-1)^3 = \underset{(1)}{1^3}+\underset{(27)}{3^3}+\underset{(125)}{5^3}+\ldots+(2n-1)^3$

уровнение которое надо решить представляет собой равенство, где в левой части стоит дробь, а в правой число знаменотель дроби — это числовой ряд где формула каждого члена: $3n-2$ где n — это номер члена в числовом ряду, где членов всего n. И тогда получим знаменотель в виде $(3a_1-2)+(3a_2-2)+(3a_3-2)+\ldots+(3a_n-2)$, где a_1 — номер члена, а последовательность из этих номеров — арифметическая прогрессия с ходом $=1$.

Значит знаменотель можно переписать в виде

$$-2\cdot n+\frac{3n(a_n+1)}{2}=-2\cdot n+\frac{3n(n+1)}{2},\ (a_n=n),\ \frac{n(n+1)}{2}$$ — сумма арифмет. прогрессии.

$$\frac{n^2(2n^2-1)}{-2n+\frac{3n(n+1)}{2}}=35$$, сократим на n

$$\frac{n(2n^2-1)}{\frac{3(n+1)}{2}-2}=35$$

$$\frac{2n^3-n}{\frac{3n+3}{2}-2}=35 \Leftrightarrow \frac{2n^3-n}{1{,}5n\cancel{+0{,}5-2}\ -0{,}5}=35 \Leftrightarrow 2n^3-n=35\cdot1{,}5n-0{,}5\cdot35$$

$$\Downarrow\ 35\cdot0{,}5$$

$$2n^3-53{,}5n+\cancel{52{,}5}\ 35\cdot0{,}5=0$$

$$2n^3=53{,}5n-\cancel{52{,}5}\ \vert :2$$

$$n^3=26{,}75n-\cancel{26{,}25}\ \cancel{17{,}5}\ 8{,}75$$

т.к n^3 — цело число, а при умножении числа 26,75 и далько получится число: ....,75 чтобы при вычитании из него 8,75 получить цело число. ~~при умножении числа 7,75~~ $\Rightarrow n=1,5,9,13\ldots$

$n=4m+1$, где $m\in(0;+\infty)$, ~~числа от 0 до $+\infty$~~

подставим эти числа

Найдем что при подстановке числа 5.

получим верное равенство $5^3=26{,}75\cdot5-8{,}75$

$125=133{,}75-8{,}75$

$125=125$ — верно.

Ответ: $n=5$.

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 31400

№ 5.

Процент содержания спирта можно рассчитать по следующей формуле:

$N=\frac{V_{спирта}}{V_{сосуда}}\cdot 100\%$, т.к первоначальный $V_{спирта}$ = объему сосуда, тогда $V_{спирта}$ можно рассчитывать по той части которую заполнял спирт если бы он не смешивался с водой.

А т.к он смешивается то при переливании уходит $\frac{1}{5}$ спирта при первом переливании, при последующих уходит $\frac{1}{5}$ того V спирта, который остается. ($\frac{1}{5}=0{,}2=20\%$)

1) переливание - остается 0,8 V спирта   V - первоначальный объем

2) Переливание - остается 0,8 · 0,8V спирта и так далее ... => можно вывести формулу оставшегося объема спирта (если бы не было воды)

$V\cdot(0{,}8)^n$ = V спирта после n переливаний от первоначального

Найти количество переливаний после которых концентрация спирта будет меньше 30% = 0,3. Vсосуда примем за 1

$$\frac{V\cdot(0{,}8)^n}{1}<0{,}3$$

V - первонач объем спирта = Vсосуда => он равен 1.

$V\cdot(0{,}8)^n<0{,}3$

$(0{,}8)^n<0{,}3$, после перебора чисел и найдем что после 6 переливания процентное содержание спирта станет меньше 0,3, а после 5 будет больше чем 0,3.

5 $(0{,}8)^5=32768>0{,}3$ 6 $(0{,}8)^6=0{,}262144<0{,}3$

Ответ: 6

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР

~~При первом переливании уходит $\frac{1}{5}$, то есть 20%, то есть 0,2 V первоначального~~

№ 2

$$20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\,\frac{x^2-4}{x^2-1}=0$$

$$\frac{20(x-2)^2}{(x+1)^2}^{(x-1)^2}-\frac{5(x+2)^2}{(x-1)^2}^{(x+1)^2}+\frac{48(x^2-4)}{x^2-1}^{(x^2-1)}=0$$

$$\frac{20(x-2)^2(x-1)^2-5(x+2)^2(x+1)^2+48(x^2-4)(x^2-1)}{(x^2-1)^2}=0$$

дробь равна 0, когда числитель $=0$, а знаменатель нет.

$(x^2-1)^2\neq 0$

$x\neq 1$

$20(x-2)^2(x-1)^2-5(x+2)^2(x+1)^2+48(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)=0$

$20\cdot(x^2-4x+4)(x^2-2x+1)-5(x^2+4x+4)(x^2+2x+1)+48(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)=0$

$20(x^4-2x^3+x^2-4x^3+8x^2-4x+4x^2-8x+4)-5(x^4+2x^3+x^2+4x^3+8x^2+4x+4x^2+8x+4)$

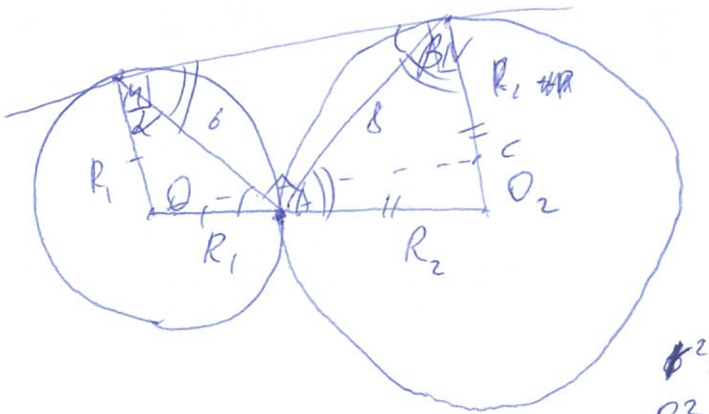
$+48(x^4-x^2-4x^2+4)=0$ $\Rightarrow$?

6

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 31400

№8.



Дано: окружности O_1 и O_2 с радиусами R_1 и R_2.
$MA = 6$, $AN = 8$
MN – касательная – общая.
Найти: R_1 и R_2

$r^2 = 6^2 + r^2 - 2\cdot 6\cdot r\cdot \cos\alpha$
$R^2 = 8^2 + R^2 - 2\cdot 8\cdot R\cdot \cos\beta$

т.к MN – общая касательная, то $\angle O_1MN = O_2NM = 90°$.
в $\triangle MAO_1$ стороны $MO_1 = O_1A = R_1 \Rightarrow \angle O_1MA = \angle MAO_1$
в $\triangle NAO_2$ стороны $AO_2 = O_2N = R_2 \Rightarrow \angle O_2NA = \angle O_2AN$.
Из рисунка видно что $\angle O_1MA + \angle AMN = \angle O_2NA + ANM \Rightarrow$

$\angle O_1MA + \angle O_2NA = \angle AMN + \angle ANM = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\angle NAM = 90°}$ т.к $\angle MAO_1 = \angle O_1MA$ и $\angle ANO_2 = \angle NAO_2$ и

их сумма $= 90$, а $\angle NAM + \angle MAO_1 + \angle NAO_2 = 180°$.

т.к $\angle NAM = 90°$ то $\triangle MAN$ – п/у
По теореме Пифагора
$MN^2 = 6^2 + 8^2$
$MN^2 = 100 \Rightarrow MN = 10$.

Проведем прямую $O_1C \parallel MN$ и $O_1C \parallel MO_1$

MNO_2O_1 – трапеция, $MO_1 \parallel NO_2$ и $MN \perp MO_1$ и $NO_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1C \perp NO_2 \Rightarrow \angle O_1CO_2 = 90° \Rightarrow \triangle O_1CO_2$ – п/у.

По теореме Пифагора: $(R_1 + R_2)^2 = (O_1C)^2 + (CO_2)^2$

7

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 31400

$O_1C = 10$, т.к $\square\ O_1MNO_2$ – прямоугольник

$CO_2 = R_2 - R_1$

$(R_1+R_2)^2 = 100 + (R_2-R_1)^2$

сократим $R_1^2 + 2R_1R_2 + R_2^2 = 100 + R_2^2 - 2R_1R_2 + R_1^2$

$4R_1R_2 = 100 \mid :4$

$R_1 \cdot R_2 = 25 \Rightarrow R_1 - ?\quad R_2 - ?$ $\underline{\pm}$