ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 87087 Класс 7

Вариант 31 Дата 19.02.2022

2)

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{8}{27}-\frac{16}{81}+\dots\right)\left(\frac{3}{5}-\frac{9}{25}+\frac{27}{125}-\frac{81}{625}\right)=\cancel{\frac{2}{3}}\left(-\left(\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^3+\dots\right)\right)\left(-\left(\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{3}{5}\right)^3+\dots\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n$$ +

Заметим, что оба сомножителя – это суммы геометрических последовательностей с основанием, по модулю меньшим единицы, значит обе эти суммы сходятся и, по формуле суммы геометрических последовательностей,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n=\frac{\overset{\frac{2}{3}}{1}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}\cdot\frac{\overset{\frac{3}{5}}{\cancel{1}}}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}=\frac{1}{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{\frac{8}{5}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{8}=\frac{3}{8}=0,375$$

Ответ: 0,~~375~~.

⑧

~~3)~~ 4)

~~Нудет~~ $f(x)+\left(x+\frac{1}{2}\right)f(1-x)=1$

$f(x)=1-\left(x+\frac{1}{2}\right)f(1-x)$

Подставим в это равенство $x=-\frac{1}{2}$, тогда

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{3}{2}\right)=1$ +

~~Теперь подставим $x=\frac{3}{2}$, тогда~~

~~$f\left(\frac{3}{2}\right)=1-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right)=1-2f\left(-\frac{1}{2}\right)=1-2\cdot1=-1$~~

Теперь запишем равенство относительно x и относительно −x в одну систему

$$\begin{cases}f(x)\cancel{x}=1-\left(x+\frac{1}{2}\right)f(1-x)\\ f(1-x)=1-\left(\frac{3}{2}-x\right)f(x)\end{cases}$$ +

Если $x\neq-\frac{1}{2}$, то из первого равенства можно выразить, чему равно $f(1-x)$ и приравнять это к правой части второго равенства, тогда

$$\begin{cases}\frac{1-f(x)}{x+\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{3}{2}-x\right)(\cancel{x}+f(x)\\ x\neq-\frac{1}{2}\end{cases}$$

ГАЗПРОМ

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 87087 Класс 7

Вариант 31 Дата 19.02.2022

Заполняется проверяющим строго по образцу

Образец заполнения: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	8	0	20	15	0				

Оценка цифрами: 48

Оценка прописью: сорок восемь

Подпись

1)

$x^9-22x^3+\sqrt{21}=0$

Сделаем замену $x^3=t$, тогда уравнение примет вид

$t^3-22t+\sqrt{21}=0$

Заметим, что $t=\sqrt{21}$ является корнем уравнения, значит это уравнение равносильно тому, что

$$\left[\begin{array}{l} t=\sqrt{21} \\ \dfrac{t^3-22t+\sqrt{21}}{t-\sqrt{21}}=0 \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} t=\sqrt{21} \\ t^2+\sqrt{21}t-1=0 \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} t=\sqrt{21} \\ t=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2} \\ t=\dfrac{-5-\sqrt{21}}{2} \end{array}\right. \quad +$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\sqrt[6]{21} \; + \\ x=\dfrac{\sqrt[3]{20-4\sqrt{21}}}{2} \\ x=-\dfrac{\sqrt[3]{20+4\sqrt{21}}}{2} \end{array}\right.$$

+

Ответ: либо $x=\sqrt[6]{21}$, либо $x=\dfrac{\sqrt[3]{20-4\sqrt{21}}}{2}$, либо $x=-\dfrac{\sqrt[3]{20+4\sqrt{21}}}{2}$.

ГАЗПРОМ
ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 87087 Класс 7
Вариант 31 Дата 19.02.2022

$$\begin{cases} 1-f(x)=x+\frac{1}{2}-(\frac{3}{2}-x)(x+\frac{1}{2})f(x) \\ x\neq-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Но, при $x=-\frac{1}{2}$ это равенство тоже выходит верным, значит вторая строчка системы не обязательна.

$$1-f(x)=x+\frac{1}{2}-(\frac{3}{2}-x)(x+\frac{1}{2})f(x)$$

$$\frac{1}{2}-x=f(x)(1-(\frac{3}{2}-x)(x+\frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{2}-x=f(x)(x^2-x+\frac{1}{4})$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ f(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}-x} \end{array}\right.$$

Если подставить в изначальное равенство $x=\frac{1}{2}$, то выйдет, что

$$f(\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})f(1-\frac{1}{2})=1$$

$$f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})=1$$

$$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

Значит искомая функция ровно одна и $\overset{\text{она}}{\vee}$ имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{2}-x}; & x\neq\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}; & x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ: $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{1-2x}; & x\neq\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}; & x=\frac{1}{2} \end{cases}$. (+)

5)

Пусть одно место со ржавчиной появилось на расстоянии x м от конца трубы, а другое – на расстоянии y м от того же конца трубы, тогда условие задачи будет выполняться в том и только в том случае, если

$$\begin{cases} |x-y|\leq\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}\leq x\leq\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\leq \overset{y}{\cancel{x}}\leq\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y\leq\frac{1}{4} \\ y-x\leq\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}\leq x\leq\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\leq y\leq\frac{3}{4} \end{cases}$$

И, по условию, $0\leq x\leq1$ и $0\leq y\leq1$. Если расположить полу-

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

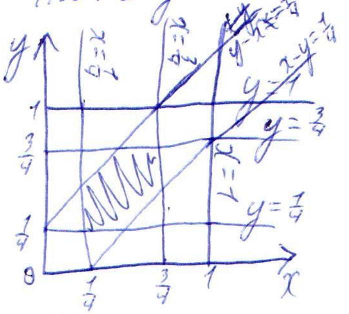
1. Используйте только размеченные стороны листов.
2. Заполните номер варианта и номер страницы в поле внизу.

Математика

Площадка написания
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Шифр 87087 Класс 7
Вариант 31 Дата 19.02.2022

чившееся множество точек на координатной плоскости xOy, то получится следующее:



Площадь закрашенного шестиугольника равняется площади квадрата со стороной $\frac{1}{2}$ минус площадь 2-ух ~~п~~ прямоугольных равнобедренных треугольника с катетами, равными $\frac{1}{4}$, то есть

$$S=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$$

Так как все точки внутри большого квадрата со стороной 1 равноправны, искомая вероятность равна отношению площади шестиугольника к площади квадрата, то есть

$$p=\frac{S}{1^2}=\frac{3}{16}$$

Ответ: $\frac{\cancel{3}\,1}{16}$.

15

б)

Если обозначить кол-во акций в пакетах Газнефти, Дванефти и Тринефти за a, $в$ и c соответственно, а цены 1 акции этих компаний за x, y и z соответственно, то информацию из задачи можно записать в виде системы

$$\begin{cases} a+в=c \\ 4вy=ax \\ 5вy=cz \\ 16\cdot10^3\le x-y\le 20\cdot10^3 \\ 42\cdot10^3\le z\le 60\cdot10^3 \end{cases}$$

0

A