

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 08.02.2020
 Площадка написания МГТУ имени Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	20	18	8					76	семьдесят шесть	

Гр. №1.

Задача 1.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{y^2 + x \cdot y - \sqrt[4]{x^5 \cdot y^3} - \sqrt[4]{x \cdot y^7}}{\sqrt[4]{y^5} - \sqrt[4]{x^2 \cdot y^3}} \cdot (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}) = \\
 &= \frac{y(x+y) - y^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot (x+y)}{y^{\frac{3}{4}} \cdot (y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})} \cdot (x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}) = \\
 &= \frac{(x+y) \cdot y^{\frac{3}{4}} \cdot (y^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}}) \cdot (x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}})}{y^{\frac{3}{4}} \cdot (y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})} = \frac{y^{\frac{3}{4}} \cdot (y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})}{y^{\frac{3}{4}} \cdot (y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})} \cdot (x+y) = x+y
 \end{aligned}$$

$$A = x+y = (1722+297) + 1 = 2020$$

Ответ: 2020 ✓

(5)

Задача 2.

Пусть всего — x студентов.

По условию: ~~100~~ $\frac{4}{100} \cdot x < 14 < \frac{5}{100} \cdot x$

$$4 \cdot x < 1400 < 5 \cdot x \Leftrightarrow x \in [281; 349]$$

Также известно, что $x : 6$ (шестая часть целая) ✓

Если $\frac{56}{100} \cdot x = \frac{14}{25} \cdot x$ получим оценку „хорошо“, то $x : 25$ ✓

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 08.02.2020

Площадка написания МГТУ имени Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка													

Стр. №2

Подходят: $x=0$; $x=150$; $x=300$; $x=450 \dots$

Промежутку $x \in [281; 349]$ подходит только $x=300$.

Ответ: 300 ✓ 10

Задача 3.

$$(\cos 2\pi x - 5 \cos \pi x - 2) \cdot \log_3 (5x - 2 - 2x^2) = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$$

$$x = \frac{-5 \pm 3}{-4} = 2; \frac{1}{2}$$

ОПЗ:

$$5x - 2 - 2x^2 > 0$$

или

$$x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \checkmark$$

Решением уравнения будет совокупность корней

$$\textcircled{1} = 0 \text{ и } \textcircled{2} = 0:$$

$$\textcircled{1} \cos 2\pi x - 5 \cos \pi x - 2 = 0$$

$$2 \cos^2 \pi x - 5 \cos \pi x - 3 = 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49$$

$$\cos \pi x = \frac{5 \pm 7}{4} = 3; -\frac{1}{2}$$

$$\cos \pi x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \pi x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2}{3} + 2n, n \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$$

$$x = -\frac{2}{3} + 2n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\textcircled{2} \log_3 (5x - 2 - 2x^2) = 0$$

$$5x - 2 - 2x^2 = 1$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{4} = \frac{3}{2}; 1$$

оба корня подходят.

по ОПЗ ~~но~~ $x = \frac{2}{3}; x = 1\frac{1}{3}$.

Стр. №3

Найдём сумму корней: $\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 1 = 4,5$

Ответ: 4,5

15

Задача 4.

Пусть x — утренняя цена $(y < x)$
 y — вечерняя цена.

	Продали утром: (кол-во)	Продали вечером: (кол-во)	Нужно найти:
I.	a	b	$(b+d+f) \cdot y$
II.	c	d	
III.	e	f	

Тогда:

$$\begin{cases}
 1700 = x \cdot a + y \cdot b \\
 1700 = x \cdot c + y \cdot d \\
 1700 = x \cdot e + y \cdot f
 \end{cases}
 \begin{cases}
 a+b=12 \\
 c+d=18 \\
 e+f=32
 \end{cases}
 \begin{cases}
 a=12-b \\
 c=18-d \\
 e=32-f
 \end{cases}$$

Подставим ② в ①:

$$\begin{cases}
 1700 = 12x + b \cdot (y-x) \\
 1700 = 18x + d \cdot (y-x) \\
 1700 = 32x + f \cdot (y-x)
 \end{cases}$$

Сложим все 3 ур-ния: $5100 = 62x + (y-x)(b+d+f)$

$$b+d+f = \frac{62x - 5100}{x-y} \in \mathbb{Z}$$

Заметим, что $x > \frac{1700}{12} \Rightarrow x \geq 142$

(иначе не удастся набрать 1700)
 в I.

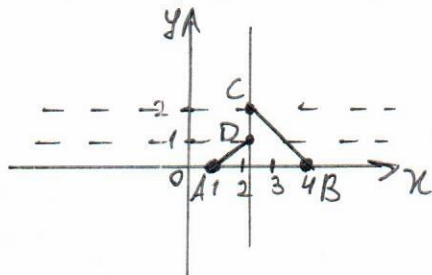
Предположим, что $x=150$ подходит, тогда $\frac{62 \cdot 150 - 5100}{150-y} \in \mathbb{Z}$

Стр. №6.

Задача 6.

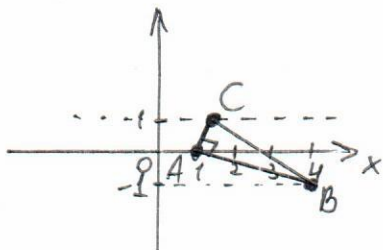
$$y = \sqrt{(x-1)^2 + 1} + \sqrt{(x-4)^2 + 4}$$

Можно представить как: $y = \sqrt{(x-1)^2 + (1-0)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (2-0)^2}$



y равен сумме расст. между
 $(A$ и $D)$ и $(B$ и $C)$, где
 $A(1;0)$, $B(4;0)$, а C и D
 располож. на одной вертикали.

Сдвинем т. C и т. B
 вниз на 1:



Можно найти x , при котором $AC + BC = \min$.
 $(C_y = 1)$

$\min$ периметр будет у прямой. Δ -ка;

$\angle CAB = 90^\circ$, AB наклонена под $k = -\frac{1}{3}$

Тогда AC : $k = \frac{-1}{-\frac{1}{3}} = 3 = \tan \alpha$

$3 = \frac{1}{\Delta x} \Leftrightarrow \Delta x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1\frac{1}{3}$
 $C(1\frac{1}{3}; 1)$

Найдём y :

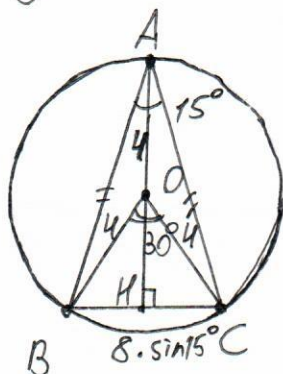
$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt{\frac{1}{9} + 1} + \sqrt{\frac{64}{9} + 4} = \\
 &= \sqrt{\frac{10}{9}} + \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10 + \sqrt{10}}{3}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{10 + \sqrt{10}}{3}$

8

352 при $x=2$

Стр. № 5



$$BC = 2 \cdot 4 \cdot \sin 15^\circ = 8 \cdot \sin 15^\circ$$

(по теор. синусов)

$$OH = \sqrt{16 - 16 \sin^2 15^\circ} = 4 \cdot \cos 15^\circ$$

$$AH = 4 + 4 \cos 15^\circ$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sin 15^\circ \cdot (4 + 4 \cos 15^\circ) =$$

$$= 16 \sin 15^\circ + 8 \sin 30^\circ = 16 \sin 15^\circ + 4$$

$\sin 15^\circ < \frac{1}{2} \Rightarrow S_{ABC} < 12$

Если $\angle BAC = 75^\circ$, то S_{ABC} будет больше 16 см².
Тогда 75° возможен.

Ответ: 75°

✓

~~0,17~~

$$BC = 8 \cdot \sin 75^\circ$$

$$OH = 4 \cdot \cos 75^\circ$$

$$AH = 4 + 4 \cos 75^\circ$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sin 75^\circ \cdot (4 + 4 \cos 75^\circ) =$$

$$= 16 \cdot \sin 75^\circ + 8 \sin 150^\circ =$$

$$= 16 \sin 75^\circ + 4$$

$$\sin 75^\circ > \frac{3}{4}, \text{ т.к. } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{3}{4}$$

$$\text{Тогда } S_{ABC} > 16 \text{ (+)}$$

18

Стр. №4

$$\frac{4200}{150-y} \in \mathbb{Z}, \quad y=50 - \text{подходит.}$$

Покажем, что $x=150$ и $y=50$ подходят:

$$x \cdot 11 + y \cdot 1 = 1700 \quad \oplus \quad 11+1=12$$

$$x \cdot 8 + y \cdot 10 = 1700 \quad \oplus \quad 8+10=18$$

$$x \cdot 1 + y \cdot 31 = 1700 \quad \oplus \quad 1+31=32, \text{ ч.т.ч.}$$

$$\text{Т.о. } b+d+s = \frac{62 \cdot 150 - 5100}{150 - 50} = \frac{4200}{100} = 42 = 1+10+31$$

$$(b+d+s) \cdot y = 42 \cdot 50 = 2100$$

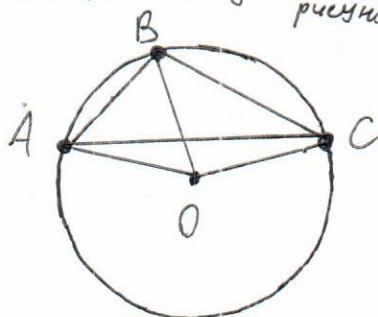
Ответ: вечерняя выручка I: 50
 вечерняя выручка II: 500
 веч. выручка III: 1550

Суммарная вечерняя выручка: 2100.

20

Задача 5.

Т.к. прямые AB и AC можно считать такими:



Т.к. $S_{OBC} = 4 \text{ см}^2$ и $BO = CO = 4 \text{ см}$:
(радиусы)

$$4 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin \angle BOC$$

$$\sin \angle BOC = \frac{1}{2}$$

$$\text{Тогда: } \begin{cases} \angle BOC = 30^\circ \\ \angle BOC = 150^\circ \end{cases}$$

$$\text{Тогда соответственно: } \begin{cases} \angle BAC = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ \\ \angle BAC = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ \end{cases}$$

($\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$, $\angle BOC$ - центральный)

есть два случая

165°
115°

Покажем, что $\angle BAC = 15^\circ$ не годится. Но $S_{ABC} > 16 \text{ см}^2$:

тогда S_{ABC} будет при тех же условиях $\Rightarrow AB = AC$.